اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

سنجش دوازدهم
آزمـــون ۳ از ۱۴

شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

ویژهٔ پایهٔ دوازدهم

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی
سنجش دوازدهم ــ مرحلهٔ اول
(۱۴۰۲/۰۷/۲۸)

علوم ریاضی و فنی (دوازدهم)

کارنامهٔ آزمون، عصر روز برگزاری آن از طریق سایت اینترنتی زیر قابل مشاهده می‌باشد:

www.sanjeshserv.ir

مدیران، مشاوران و دبیران محترم دبیرستان‌ها و مراکز آموزشی

به منظور فراهم نمودن زمینهٔ ارتباط مستقیم مدیران، مشاوران و دبیران محترم دبیرستان‌ها و مراکز آموزشی همکار در امر آزمون‌های آزمایشی سنجش و بهره‌مندی از نظرات ارزشمند شما عزیزان در خصوص این آزمون‌ها ، آدرس پست الکترونیکی test@sanjeshserv.com معرفی می‌گردد. از شما عزیزان دعوت می‌شود، دیدگاه‌های ارزشمند خود را از طریق آدرس فوق با مدیر تولیدات علمی و آموزشی این مجموعه در میان بگذارید.

کانال‌های ارتباطی:
@sanjesheducationgroup
@sanjeshserv

ریاضیات

۱. گزینه ۱ درست است.

چون $x=۲$ در دامنهٔ تابع نیست، پس $x=۲$ ریشهٔ مخرج است، یعنی $ax-۴=۰$ است؛ بنابراین $a=۲$ است و داریم:

$$f(x)=\frac{۲}{۲x-۴}=\frac{۱}{x-۲}=\frac{x-۲}{(x-۲)^{۲}}$$

$$f(x-۱)=\frac{x-۱-۲}{(x-۱-۲)^{۲}}=\frac{x-۳}{(x-۳)^{۲}}=\frac{x-۳}{x^{۲}-۶x+۹}$$

با مقایسه ضابطه $g(x)$ با این ضابطه، مقادیر $p=-۳$ و $m=-۶$ و $n=۹$ به‌دست می‌آیند؛ پس:

$$m-n+p=-۶-۹-۳=-۱۸$$

۲. گزینه ۳ درست است.

نکته: $۰\le a-[a]<۱$

تابع ۲^{x} اکیداً صعودی است و چون $gof(x)=۲^{f(x)}$ است، درنتیجه برای یافتن برد این تابع باید محدودهٔ f را بیابیم:

$$۰\le\frac{x-۱}{۳}-[\frac{x-۱}{۳}]<۱\Rightarrow ۰\le x-۱-۳[\frac{x-۱}{۳}]<۳$$

$$\Rightarrow ۱\le x-۳[\frac{x-۱}{۳}]<۴\Rightarrow ۱\le f(x)<۴\Rightarrow ۲^{۱}\le ۲^{f(x)}<۲^{۴}$$

پس برد تابع gof برابر بازهٔ $[۲,۱۶)$ است.

۳. گزینه ۲ درست است.

با توجه به اینکه $f+g$ ثابت و gof خطی است، پس هر دو تابع f و g خطی‌اند. فرض کنید $g(x)=ax+b$ باشد:

$$(f+g)(x)=۶\Rightarrow f(x)=۶-g(x)=۶-ax-b$$

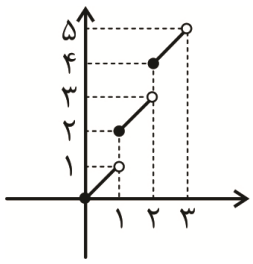
$$gof(x)=۱۰-۹x\Rightarrow a(۶-ax-b)+b=۱۰-۹x\Rightarrow -a^{۲}x+۶a-ab+b=۱۰-۹x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a^{۲}=-۹\\ ۶a-ab+b=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۳\Rightarrow b=۴\Rightarrow g(x)=۳x+۴\\ a=-۳\Rightarrow b=۷\Rightarrow g(x)=-۳x+۷\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(۳)=۱۳\ \text{یا}\ -۲\Rightarrow \text{جمع}=۱۱$$

۴. گزینه ۴ درست است.

نمودار تابع $y=x+[x]$ به‌صورت مقابل است و از طرفی:



$$\begin{cases}fof^{-۱}(x)=x & x\in R_f\\ f^{-۱}of(x)=x & x\in D_f\end{cases}$$

دقت کنید که برد تابع f شامل $y=\frac{۷}{۲}$ نیست، پس $fof^{-۱}(\frac{۷}{۲})$ وجود ندارد، ولی چون دامنه f شامل $\frac{۷}{۲}$ است، پس $f^{-۱}of(\frac{۷}{۲})=\frac{۷}{۲}$ است.

۵. گزینه ۴ درست است.

نقطه $A(a,b)$ را در وارون تابع صدق می‌دهیم: $f^{-۱}(a)=b\Rightarrow f(b)=a\Rightarrow b^{۳}+b+۲۱=a$

از طرفی مختصات A در معادله خط صدق می‌کند؛ پس $b=a+۶$ و یا $a=b-۶$ و بنابراین:

$$\Rightarrow b^{۳}+b+۲۱=b-۶\Rightarrow b^{۳}=-۲۷\Rightarrow b=-۳\Rightarrow a=-۹$$

@sanjesheducationgroup
@sanjeshserv
کانال‌های ارتباطی:

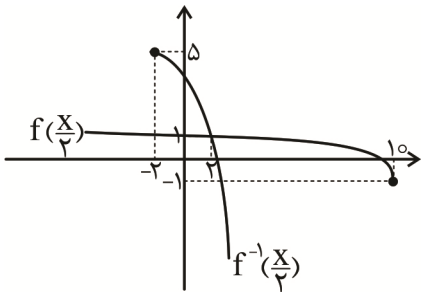
و درنتیجه $\frac{b}{a}=\frac{۱}{۳}$ است.

۶. گزینه ۲ درست است.

اولاً باید بین دامنهٔ دو تابع $f(\frac{x}{۲})$ و $f^{-۱}(\frac{x}{۲})$ اشتراک بگیریم و ثانیاً باید شرط منفی نبودن زیر رادیکال را بررسی کنیم:

$$f(x)=\sqrt{۵-x}-۱\begin{cases}D_F=(-\infty,۵]\\R_F=[-۱,+\infty]\end{cases}$$

وارون : $x=\sqrt{۵-y}-۱\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=۵-(x+۱)^۲\begin{cases}D_{f^{-۱}}=[-۱,+\infty)\\R_{f^{-۱}}=(-\infty,۵]\end{cases}$



پس دامنهٔ $f(\frac{x}{۲})$ بازهٔ $(-\infty,۱۰]$ و دامنهٔ $f^{-۱}(\frac{x}{۲})$ بازهٔ $[-۲,+\infty)$ است که اشتراک این دو بازه به‌صورت $[-۲,۱۰]$ است.

حال به کمک نمودار $f^{-۱}$ و f، شرط نامنفی بودن زیر رادیکال را بررسی می‌کنیم:

$$f(\frac{x}{۲})\geq f^{-۱}(\frac{x}{۲})\Rightarrow ۲\leq x\leq ۱۰$$

از اشتراک این بازه با بازهٔ $[-۲,۱۰]$ دامنهٔ نهایی به‌صورت بازهٔ $[۲,۱۰]$ خواهد بود که شامل ۹ عدد صحیح است.

۷. گزینه ۳ درست است.

$$f(x)=-(x-۱)^۳-۱\Rightarrow -f(x)=(x-۱)^۳+۱$$

$$g(x)=۲(x+۱)^۳+۵\Rightarrow \frac{۱}{۲}g(x)=(x+۱)^۳+\frac{۵}{۲}$$

برای تبدیل $-f(x)$ به $\frac{۱}{۲}g(x)$ باید دو واحد به چپ و ۱/۵ واحد به بالا انتقال دهیم.

۸. گزینه ۴ درست است.

اگر f اکیداً صعودی و $f(a)<f(b)$ باشد، آنگاه $a<b$ است.

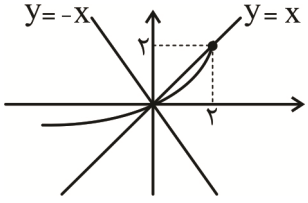
$$fog(x+۲)<۱\Rightarrow fog(x+۲)<f(۳)\Rightarrow g(x+۲)<۳\Rightarrow (x+۲)^۲-۵(x+۲)-۳<۳$$

$$\Rightarrow x^۲-x-۱۲<۰\Rightarrow -۳<x<۴$$

اعداد صحیح -۲ و -۱ و ۰، ۱، ۲ و ۳ در این نامساوی‌ها صدق می‌کنند که جمع آن‌ها برابر ۳ است.

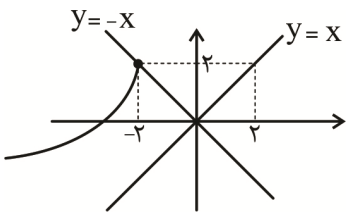
۹. گزینه ۳ درست است.

ابتدا دقت کنید که نمودار تابع $y=f(-۲x)$ به‌صورت زیر است:



$$f(-۲x)=۲-\sqrt{-۲x+۴}$$

اگر نمودار $f(-۲x)$ را بیش از چهار واحد به‌سمت چپ انتقال دهیم، هیچ‌کدام از نیمسازها را قطع نمی‌کند.

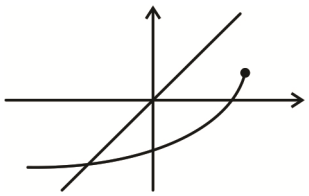


$$y=f(-2x+b)\Rightarrow y=f\left(-2(x-\frac{b}{2})\right)$$

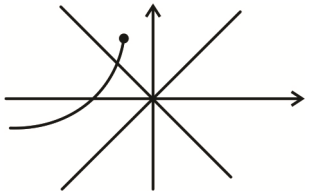
پس کافی است $-\frac{b}{2}>4$ باشد، یعنی $b<-8$ باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

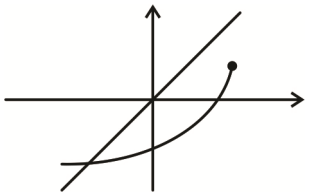
۱) $b>8$: نمودار تابع $f(-2x)$ به اندازهٔ بیشتر از $\frac{b}{2}$ به‌سمت راست می‌رود:



۲) $b>-8$: نمودار تابع $f(-2x)$ به اندازهٔ کمتر از $-\frac{b}{2}$ به‌سمت چپ می‌رود (حتی ممکن است به‌سمت راست برود):



۴) $b<8$: نمودار تابع $f(-2x)$ به اندازهٔ کمتر از $\frac{b}{2}$ به‌سمت راست می‌رود (حتی ممکن است به‌سمت چپ برود):



۱۰. گزینه ۱ درست است.

$$f(x)=6x^2+12x+8=x^3+6x^2+12x+8-x^3=(x+2)^3-x^3$$

پس $g(x)=(x+2)^3$ است.

$$\begin{cases} f(10)=12^3-10^3 \\ f(12)=14^3-12^3 \\ f(14)=16^3-14^3 \Rightarrow \text{جمع}=30^3-10^3=26000 \\ \vdots \\ f(28)=30^3-28^3 \end{cases}$$

چون $g(28)=27000$ است، پس اختلاف این مقدار برابر ۱۰۰۰ می‌شود.

۱۱. گزینه ۲ درست است.

نمودار تابع از مبدأ عبور می‌کند، پس:

$$f(0)=0\Rightarrow 3b+18=0\Rightarrow b=-6$$
$$f(x)=(ax^2-6)(x+3)+18$$

با توجه به شکل، معادله f به‌صورت $a\left((x+1)^3-1\right)$ است:

$$(ax^2-6)(x+3)+18=a\left((x+1)^3-1\right)$$

$$ax^3+3ax^2-6x=a(x^3+3x^2+3x)\Rightarrow 3a=-6\Rightarrow a=-2$$

$$\Rightarrow f(x)=-2\left((x+1)^3-1\right)=-2(x^3+3x^2+3x)$$

هدف، محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x-4)$ بر $x-6$ است و کافی است $x=6$ را در عبارت $f(x-4)$ جایگزین کنیم:

$$R=f(6-4)=f(2)=-2(8+12+6)=-52$$

۱۲. گزینه ۱ درست است.

نکته: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه: $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1})$

حالا فرض کنید $x^3=t$ باشد:

$$t^9-1=(t-1)(t^8+t^7+t^6+\ldots+t+1)$$

$$f(x)=x^{24}+x^{21}+x^{18}+\ldots+x^3+1$$

از طرفی باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ برابر $f(-1)$ است؛ پس:

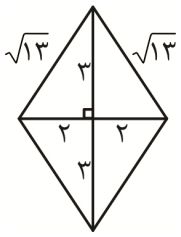
$$R=f(-1)=1$$

حالا قضیه تقسیم را می‌نویسیم. دقت کنید که مجموع ضرایب $g(x)$، همان $g(1)$ است.

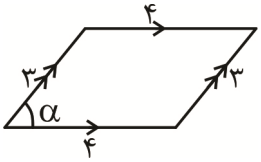
$$f(x)=(x+1)g(x)+1$$

$$x=1\Rightarrow f(1)=2g(1)+1\Rightarrow 9=2g(1)+1\Rightarrow g(1)=4$$

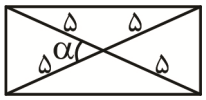
۱۳. گزینه ۳ درست است.



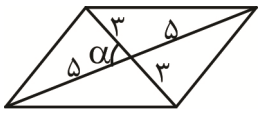
قطرهای لوزی عمود بر هم هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند. پس یک لوزی با داشتن طول قطرهای ۴ و ۶ قابل رسم است. (البته نسبت به هم‌نهشتی فقط یکی قابل رسم است.)



در متوازی‌الاضلاع مقابل طول دو ضلع ۳ و ۴ است. در ترسیم، با تغییر مقدار α بی‌شمار متوازی‌الاضلاع غیرهم‌نهشت به‌وجود می‌آیند.



با تغییر اندازهٔ زاویهٔ بین دو قطر مستطیل مقابل، بی‌شمار مستطیل با طول قطر ۱۰ می‌توان رسم کرد که هم‌نهشت نیستند.

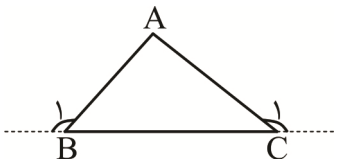


در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. پس با تغییر اندازهٔ زاویهٔ بین دو قطر، بی‌شمار متوازی‌الاضلاع غیرهم‌نهشت با طول قطرهای ۶ و ۱۰ به‌وجود می‌آیند.

۱۴. گزینه ۲ درست است.

روش اول: می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی در مثلث، برابر مجموع دو زاویهٔ درونی و نامجاور آن است. یعنی در $\overset{\Delta}{ABC}$ با فرض اینکه $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 28^\circ$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{A} + \hat{C} \\ \hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\hat{B}_1 + \hat{C}_1}_{=28^\circ} = \underbrace{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}_{=180^\circ} + \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 100^\circ$$

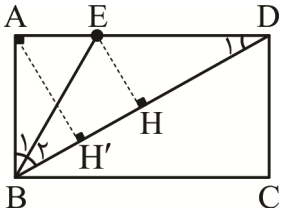


$\Rightarrow$ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث، بیرون آن واقع است.

روش دوم: می‌دانیم مجموع زاویه‌های خارجی هر مثلث، برابر 360° است. چون مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ خارجی برابر با 280° است، پس زاویهٔ خارجی سوم، برابر 80° و اندازهٔ زاویهٔ درونی متناظر با آن، برابر $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ است. یعنی مثلث ABC یک زاویهٔ باز (منفرجه) دارد و درنتیجه، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های آن، بیرون مثلث قرار می‌گیرد.

۱۵. گزینه ۴ درست است.

چون E روی عمودمنصف قطر BD است، پس $EB = ED$ است و می‌دانیم که $\overset{\Delta}{BEH} \cong \overset{\Delta}{DEH}$ است، اما دو مثلث ABE و BEH نیز به حالت (وتر و یک ضلع قائمه) با یکدیگر هم‌نهشت هستند (BE نیمساز زاویهٔ ABD است). از این‌رو $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{D}_1$ و چون $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{D}_1 = 90^\circ$، پس $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{D}_1 = 30^\circ$ است. درنتیجه داریم:



$$\overset{\Delta}{ABD}: 30^\circ \text{ ضلع روبه‌رو به زاویهٔ } AB \Rightarrow 2AB = BD \Rightarrow BD = 8\sqrt{3}$$

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{144} = 12$$

اکنون بنابر رابطهٔ $\overset{\Delta}{ABD}$ مساحت $= \frac{AB \times AD}{2} = \frac{AH' \times BD}{2}$، خواهیم داشت:

$$4\sqrt{3} \times 12 = AH' \times 8\sqrt{3} \Rightarrow AH' = \frac{4 \times 12}{8} = 6$$

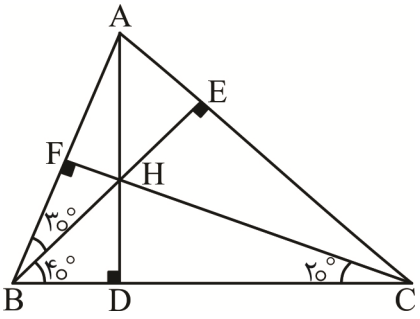
۱۶. گزینه ۲ درست است.

در مثلث BCF اندازه‌های دو زاویه، 20° و 70° است، پس:

$$\hat{F} = 180^\circ - (70^\circ + 20^\circ) = 90^\circ$$

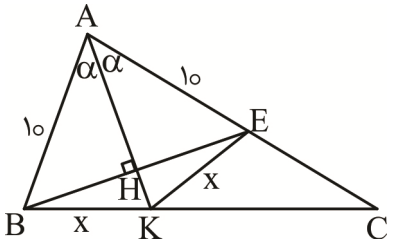
بنابراین تا اینجا، در مثلث ABC دو ارتفاع AD و CF رسم شده‌اند و می‌دانیم ارتفاع‌ها همرس‌اند؛ درنتیجه BE نیز ارتفاع است. حالا در مثلث ABE داریم:

$$\hat{A} = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$



۱۷. گزینه ۳ درست است.

AH ارتفاع و نیمساز مثلث ABE است؛ پس مثلث ABE متساوی‌الساقین است و چون AH عمودمنصف این مثلث متساوی‌الساقین است، K روی عمودمنصف BE قرار می‌گیرد.

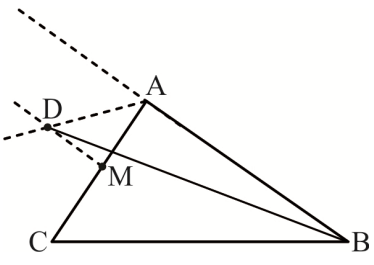


$$AB = AE = ۱۰ \Rightarrow BH = HE = ۵/۵$$

$$\overset{\Delta}{BKE}:\ KB = KE = x \xrightarrow{\text{نابرابری مثلث}} ۰ < ۱۱ < ۲x \overset{+۱۱}{\Rightarrow} ۲۲ < \underbrace{۲x + ۱۱}_{\text{محیط مثلث}} \Rightarrow$$

عدد ۲۳ می‌تواند محیط مثلث باشد.

۱۸. گزینه ۳ درست است.



روش اول: چون $\hat{B} < \hat{C}$، پس بنابر قضیهٔ صفحهٔ ۲۴ کتاب هندسهٔ ۱، $AC < AB$ و با همین استدلال در مثلث DAB، چون $\hat{DAB}$ بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث است (اگر فرض کنیم $\hat{CAB} = \alpha$، آنگاه $\hat{DAB} = ۹۰^\circ + \frac{\alpha}{۲} > ۹۰$)، پس: $BD > AB$ (*).

اما چون D روی عمودمنصف AC است، پس $\overset{\Delta}{ADC}$ متساوی‌الساقین است و میانهٔ AM همان ارتفاع وارد بر قاعده. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMD، ضلع AD وتر است و درنتیجه بنابر نابرابری مثلثی: $AD > AM$ (**). بنابراین با افزودن AM به دو طرف نابرابری (*) و سپس افزودن BD به دو طرف (**) و با توجه به اینکه $AM = \frac{AC}{۲}$، داریم:

$$AD + BD \underset{(**)}{>} AM + BD \underset{(*)}{>} AM + AB \Rightarrow \frac{AD + BD}{AM + AB} > ۱$$

روش دوم: بر روی امتداد AB و رو به بیرون مثلث ABC، نقطهٔ N را چنان انتخاب می‌کنیم که $AN = AM$ باشد و همین کار را برای امتداد DB (رو به بیرون مثلث) انجام می‌دهیم و A' را به‌گونه‌ای می‌یابیم که $A'D = AD$؛ در این صورت با توجه به اینکه $AD > AM = AN$ و نیز $BD > AB$ خواهیم داشت:

$$\underbrace{AD + BD}_{=A'B} > \underbrace{AN + AB}_{=NB} \Rightarrow \frac{A'B}{NB} > ۱ \Rightarrow \frac{AD + BD}{AN + AB} > ۱$$

۱۹. گزینه ۴ درست است.

ماتریس A به‌صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} \log_{۶}^{۶} & \log_{۱۶}^{۱۸} \\ \log_{۶}^{۱۲} & \log_{۶}^{۳۶} \end{bmatrix}$$

از طرفی $\log_{۶}^{۶} = ۱$ و $\log_{۶}^{۳۶} = ۲$ و همچنین:

$$\log_{۶}^{۱۲} + \log_{۶}^{۱۸} = \log_{۶}^{۱۲\times ۱۸} = \log_{۶}^{۶^۳} = ۳\log_{۶}^{۶} = ۳$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس A مساوی ۶ است.

۲۰. گزینه ۲ درست است.

طرفین را در $A - I$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$(A - I)(A^۴ + A^۳ + A^۲ + A + I) = (A - I)\times \bar{O} \Rightarrow A^۵ - I^۵ = \bar{O} \Rightarrow A^{۲۵} = I \overset{\times A}{\Rightarrow} A^{۲۶} = A$$

۲۱. گزینه ۱ درست است.

چون $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$ است، پس $AB = BA$ است و یعنی دو ماتریس تعویض‌پذیر هستند. حال شرایط تعویض‌پذیری را فراهم می‌کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} x & ۱ \\ -۲y & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲ & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴x+۲ & y-x \\ -۸y+۴ & ۴y \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲ & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & ۱ \\ -۲y & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴x+۲y & ۲ \\ ۲x-۲y^۲ & ۲+۲y \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{برابری درایه‌های نظیر}]{AB=BA} \begin{cases} ۴x+۲y = ۴x+۲ \\ y-x = ۲ \\ -۸y+۴ = ۲x-۲y^۲ \\ ۴y = ۲+۲y \end{cases} \Rightarrow y = ۱\ ,\ x = -۱ \Rightarrow (۲y)^۲ - x = ۴+۱ = ۵$$

۲۲. گزینه ۳ درست است.

اگر گزارهٔ داده‌شده را به زبان ریاضی برگردانیم، با گزاره‌ای به‌صورت روبه‌رو طرف هستیم: $\exists x\ ,\forall y\ ; P(x,y)$

به‌طوری‌که $\exists x$ به معنی برخی دانش‌آموزان و $\forall y$ به معنی همهٔ مدارس است.

حالا باید نقیض گزاره را با استفاده از قوانین منطق سورها به‌دست آوریم:

$$\sim \left(\exists x\ ,\forall y ; P(x,y)\right) \equiv \forall x\ ,\ \exists y ; \sim P(x,y)$$

بدین‌ترتیب اگر به زبان طبیعی بخواهیم، گزارهٔ به‌دست‌آمده را بنویسیم، به‌صورت زیر درمی‌آید:

«همهٔ دانش‌آموزان برخی مدارس ایران به فوتبال علاقه دارند.»

البته گزارهٔ بالا را می‌توان با بیان هم‌ارز دیگری نیز بیان کرد؛ مانند گزارهٔ زیر:

«مدارسی در ایران وجود دارد که همهٔ دانش‌آموزان آن‌ها به فوتبال علاقه دارند.»

۲۳. گزینه ۲ درست است.

طبق تعریف $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$، همچنین $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ و $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (قانون جذب) برقرار هستند و درنتیجه:

$$\begin{aligned} (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow p &\equiv \left((\sim p \wedge q) \Rightarrow p\right) \wedge \left(p \Rightarrow (\sim p \wedge q)\right) \\ &\equiv \left(\sim (\sim p \wedge q) \vee p\right) \wedge \left(\sim p \vee (\sim p \wedge q)\right) \\ &\equiv \left((p \vee \sim q) \vee p\right) \wedge \sim p \\ &\equiv (p \vee \sim q) \wedge \sim p \\ &\equiv (p \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge \sim p) \\ &\equiv F \vee (\sim q \wedge \sim p) \\ &\equiv \sim q \wedge \sim p \\ &\equiv \sim (p \vee q) \end{aligned}$$

۲۴. گزینه ۲ درست است.

با توجه به اینکه $B = \{\varnothing\}$ و $C = \{\{\varnothing\}\}$ است، واضح است که «الف» و «ب» نادرست و «ج» و «د» درست‌اند.

۲۵. گزینه ۱ درست است.

روش اول:

$$A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,|x^{۲}-۱۰|<۱۰\right\}=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۱,۲,۳,۴\}$$
$$B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,|\,\frac{۱}{۳}\le ۳^{x}\le ۲۷\right\}=\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$$
$$\Rightarrow A\cap B=\{-۱,۱,۲,۳\}$$

بنابر تعریف افراز در صفحهٔ ۲۱ کتاب آمار و احتمال، افرازهای دوعضوی مجموعهٔ $A\cap B$ به‌صورت زیر است که شمار آن‌ها برابر با ۷ است:

$$\{۱,۲\}\cup\{-۱,۳\};\{۱,۳\}\cup\{-۱,۲\};\{۱,-۱\}\cup\{۲,۳\};\{۱\}\cup\{-۱,۲,۳\};\{۲\}\cup\{-۱,۱,۳\};\{۳\}\cup\{-۱,۱,۲\};$$
$$\{-۱\}\cup\{۱,۲,۳\}$$

روش دوم: این روش مربوط به بودجه‌بندی این آزمون نیست، اما دانش‌آموزانی که با روش‌های شمارش (فصل ۶، کتاب ریاضی ۱) آشنا هستند، می‌توانند از روش حل زیر، پاسخ را به‌دست آورند:

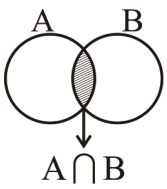
$$\Rightarrow \text{شمار افرازهای مطلوب}=۳+۴=۷$$

$$\text{شمار حالت‌های افراز به دو مجموعهٔ ۲ عضوی}=\frac{\binom{۴}{۲}}{۲!}=\frac{۶}{۲}=۳$$

$$\text{شمار حالت‌های افراز به یک مجموعهٔ ۳ عضوی و یک تک‌عضوی}=\binom{۴}{۳}=۴$$

توجه: مراقب باشید! زیرا $۰\notin(A\cap B)$ و اگر این اشتباه را مرتکب شوید، به گزینهٔ (۴) خواهید رسید!

۲۶. گزینه ۳ درست است.



می‌دانیم که مجموعهٔ $A-(A-B)$، بنابر نمودار ون، برابر است با $A\cap B$ (بخش سایه‌زده). پس در اینجا داریم: $A-(A-B)=A\cap B=\varnothing$ و دو مجموعهٔ A و B جدا از هم (مجزا) هستند. بنابر مطالب صفحه‌های ۲۹ و ۳۳ کتاب آمار و احتمال، برای سه مجموعه چون E، F و G: $E-F=E\cap F'$ و $E-(F\cup G)=(E-F)\cap(E-G)$.

حالا به کمک قانون دمورگان $(B'\cap C')'=B\cup C$ می‌توانیم بنویسیم:

$$(A\cap B)'\cap\left[(B'-C)'-(B-(A\cup C))\right]=\varnothing'\cap\left[(B\cup C)-((B-A)\cap(B-C))\right]$$
$$=U\cap\left[(B\cup C)-(B\cap(B-C))\right]=U\cap\underbrace{\left[(B\cup C)-(B-C)\right]}_{=C}=U\cap C=C$$

توجه: اگر به اشتباه بنویسید $B-(A\cup C)=(B-A)\cup(B-C)$ یا $B-(A\cup C)=(B\cap A)-(B\cap C)$، آنگاه به گزینه‌های ۱ یا ۴ خواهید رسید که نادرست هستند.

۲۷. گزینه ۴ درست است.

می‌توانیم بنویسیم: $A^{۲}-A\times B=A\times A-A\times B=A\times(A-B)$

بنابراین: $|A^{۲}-A\times B|=|A\times(A-B)|=|A||A-B|=۵\times۲=۱۰$

و می‌دانیم مجموعهٔ ۱۰ عضوی $A^{۲}-A\times B$، دارای $۲^{۱۰}=۱۰۲۴$ زیرمجموعه است.

۲۸. گزینه ۴ درست است.

گزینه‌ها را به‌ترتیب بررسی می‌کنیم:

۱) این گزاره نادرست است و با مثال نقض رد می‌شود:

مثال نقض: $\left.\begin{array}{l} A=\{۱,۲\} \\ B=\{۱\} \\ C=\{۲\} \end{array}\right\} \Rightarrow A\cup B=A\cup C \ , \ B\neq C$

۲) این گزاره نادرست است و با مثال نقض رد می‌شود:

مثال نقض: $n=۴\Rightarrow ۲^n-۱=۲^۴-۱=۱۵$ (۱۵ عددی مرکب است.)

۳) این گزاره نادرست است و با مثال نقض رد می‌شود:

مثال نقض: عدد گویا را صفر و عدد گنگ را $\sqrt{۲}$ در نظر می‌گیریم:

$۰\times\sqrt{۲}=۰=$ عدد گویا

۴) این گزاره درست است و درستی آن را اثبات می‌کنیم:

$k=n(n+۱)\Rightarrow ۴k+۱=۴n(n+۱)+۱=۴n^۲+۴n+۱=(۲n+۱)^۲=$ عدد مربع کامل

۲۹. گزینه ۳ درست است.

ابتدا رابطهٔ داده‌شده را با عملیات‌های منطقی و ریاضی ساده می‌کنیم:

$$۲a^۲-b^۲=۲(a-b)^۲\Rightarrow ۲a^۲-b^۲=۲a^۲+۲b^۲-۴ab$$

$$\Rightarrow ۳b^۲-۴ab=۰\Rightarrow b(۳b-۴a)=۰\Rightarrow b=۰ \ \text{یا} \ a=\frac{۳b}{۴}$$

اگر $b=۰\xrightarrow{۰\le a,b<۱۷}(۰,۰),(۱,۰),...,(۱۶,۰)\Rightarrow$ ۱۷ تا

اگر $a=\frac{۳b}{۴}\Rightarrow ۰\le\frac{۳b}{۴}<۱۷\Rightarrow ۰\le b<\frac{۱۷\times ۴}{۳}\xrightarrow{۰\le a,b<۱۷}(۰,۰),(۳,۴),(۶,۸),(۹,۱۲),(۱۲,۱۶)\Rightarrow$ ۵ تا

توجه شود که $(۰,۰)$ تکراری است و درنتیجه $۱۷+۴=۲۱$ جفت عدد صحیح به‌صورت (a,b) وجود دارد.

۳۰. گزینه ۱ درست است.

روش اول: فرض کنیم (فرض خلف) که $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ گنگ نباشد؛ پس عددی گویا است، یعنی $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{x+y}{xy}$ عددی گویاست. می‌دانیم حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است؛ پس xy گنگ و عدد $xy.\frac{x+y}{xy}=x+y$، گویا است. همچنین می‌دانیم که مجموع و تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست؛ درنتیجه باید عدد $(x+y)-x=y$ گویا باشد که تناقض با گنگ بودن y دارد.

روش دوم: فرض کنیم (فرض خلف) که $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ گنگ نباشد؛ پس عددی گویاست. می‌دانیم که $\frac{۱}{x}$ گویا و مجموع و تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است؛ پس داریم:

$$(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y})-\frac{۱}{x}=\frac{۱}{y}\in\mathbb{Q}$$

پس باید $y\in\mathbb{Q}$ باشد که یک تناقض است.

توجه: می‌شد به کمک تفاضل عددی گنگ از عددی گویا، به تناقض $x\in\mathbb{Q}^c$ رسید که در اینجا نیامده است.

فیزیک

۳۱. گزینه ۳ درست است.

تعداد کمیت‌های فیزیکی، آنچنان زیاد است که تعیین یکای مستقل برای همه آن‌ها در عمل ناممکن است. بسیاری از کمیت‌های فیزیکی مستقل از یکدیگر نیستند و توسط رابطه‌ها و تعریف‌های فیزیکی به یکدیگر وابسته‌اند.

۳۲. گزینه ۲ درست است.

ابتدا تمام طول‌ها را برحسب سانتی‌متر به‌دست می‌آوریم.

$$۸۰۰\text{ft}\times\frac{۱۲\text{in}}{۱\text{ft}}\times\frac{۲/۵\text{cm}}{۱\text{in}}=۲۴\times۱۰^{۳}\ \text{cm}$$

$$۱۶۰۰\text{ft}\times\frac{۱۲\text{in}}{۱\text{ft}}\times\frac{۲/۵\text{cm}}{۱\text{in}}=۴۸\times۱۰^{۳}\ \text{cm}$$

$$۶۰\,\text{ft}\times\frac{۱۲\text{in}}{۱\text{ft}}\times\frac{۲/۵\text{cm}}{۱\text{in}}=۱۸\times۱۰^{۲}\ \text{cm}$$

حال مساحت ذوزنقه را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{(\text{قاعده بزرگ}+\text{قاعده کوچک})}{۲}\times\text{ارتفاع}$$

$$\Rightarrow s=\frac{a+b}{۲}\times h=\frac{۲۴\times۱۰^{۳}+۴۸\times۱۰^{۳}}{۲}\times(۱۸\times۱۰^{۲})=۶۴۸\times۱۰^{۵}$$

حال مساحت ذوزنقه را به‌صورت نمادگذاری علمی می‌نویسیم:

$$\begin{cases}۶/۴۸\times۱۰^{۷}\ \text{cm}^{۲}\\ a\times۱۰^{b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۶/۴۸\\ b=۷\end{cases}$$

حال حاصل $a+b$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a+b=۶/۴۸+۷=۱۳/۴۸\,\text{cm}$$

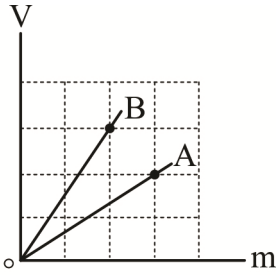
۳۳. گزینه ۱ درست است.

$$۲۴۰\frac{\text{mg cm}^{۲}}{\text{s}^{۲}}\times\frac{۱۰^{-۳}\,\text{g}}{۱\text{mg}}\times\frac{۱\ (\text{پاوند})}{۵۰۰\text{g}}\times(\frac{۱\ \text{فوت}}{۳۰\text{cm}})^{۲}\times(\frac{۶۰\,\text{s}}{۱\ \text{دقیقه}})^{۲}$$

$$=۱/۹۲\times۱۰^{-۳}\ \frac{\text{پاوند فوت مربع}}{\text{مجذور دقیقه}}\times۱۰^{-۳}=۱/۹۲\times۱۰^{-۶}\ \frac{\text{کیلو پاوند فوت مربع}}{\text{مجذور دقیقه}}$$

۳۴. گزینه ۳ درست است.

ابتدا به کمک نقاط مشخص‌شده در نمودار، نسبت چگالی **B** به **A** را مشخص می‌کنیم:



$$\rho = \frac{m}{V} \begin{matrix} \nearrow \frac{۲}{۳} \\ \searrow \frac{۳}{۲} \end{matrix} \Rightarrow \rho_B = \frac{۴}{۹}\rho_A \quad \text{برابر } \frac{۴}{۹} \leftarrow$$

در ادامه با توجه به اینکه حجم فلز B، $\frac{۳}{۴}$ حجم فلز A است، نسبت جرم B به A را تعیین می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \quad m = \rho . V$$

$$\text{برابر } \frac{۱}{۳} \qquad \frac{۴}{۹} \qquad \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow m_B = \frac{۱}{۳} m_A = \frac{۱}{۳} \times ۴۵۰\,g = ۱۵۰\,g$$

۳۵. گزینه ۳ درست است.

گام اول: حجم ظاهری کره را با استفاده از رابطه حجم کره $(V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳)$ به‌دست می‌آوریم:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \rightarrow V = \frac{۴}{۳} \times ۳ \times (۴)^۳ = ۲۵۶\,cm^۳$$

گام دوم: حجم واقعی این کره را با استفاده از رابطه چگالی $(\rho = \frac{m}{V})$ و با توجه به یکسان‌سازی یکاها محاسبه می‌کنیم.

$$\rho = ۷۸۰۰ \frac{kg}{m^۳} = ۷/۸ \frac{g}{cm^۳}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{۱۱۷۰}{۷/۸} = ۱۵۰\,cm^۳$$

گام سوم: حجم حفره را تعیین می‌کنیم:

$$\text{حفره } V = V_{\text{ظاهری}} - V_{\text{واقعی}} \qquad V_{\text{حفره}} = ۲۵۶ - ۱۵۰ = ۱۰۶\,cm^۳$$

گام چهارم: درصد حجم حفره را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{V_{\text{حفره}}}{V_{\text{ظاهری}}} = \frac{۱۰۶}{۲۵۶} \simeq \frac{۴۱}{۱۰۰} \times ۱۰۰ = \%۴۱$$

۳۶. گزینه ۱ درست است.

بررسی گزینه‌ها:

الف- افزایش دما سبب کوچک‌تر شدن هم‌چسبی مولکول‌های مایع و کوچک‌تر شدن قطره‌های مایع می‌شود. (نادرست)

ب- نیروی الکتریکی سبب نگه‌داشتن ذرات جامد در کنار هم می‌شود. (نادرست)

ج- درست

د- برد نیروهای بین‌مولکولی تا چند برابر قطر مولکول‌ها است. (نادرست)

هـ- درست

۳۷. گزینه ۲ درست است.

گام ۱: فشار هر دو مکعب بر سطح زمین در حالت اول با هم برابر است. از رابطه فشار $(P = \frac{F}{A})$ استفاده می‌کنیم و نسبت جرم دو مکعب را به‌دست می‌آوریم.

$$P = \frac{F_۱}{A} = \frac{mg}{A}$$

$$P_{۱A} = P_{۱B} \Rightarrow \frac{m_A g}{A_A} = \frac{m_B g}{A_B} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{۱}{۴}$$

$$a^۲ \qquad ۴a^۲$$

گام ۲: فشار ناشی از مکعب‌ها بر سطح زمین در حالت دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$P = P_{۲B} = \frac{(m_A + m_B)g}{A}$$

$$P_{۲B} = \frac{(\frac{۱}{۴}m_B + m_B)g}{A_B} = \frac{\frac{۵}{۴}m_B g}{۴a^۲} \quad P_{۱B}$$

نسبت فشار در حالت دوم به فشار در حالت اول را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{P_{۲B}}{P_{۱B}} = \frac{۵}{۴}$$

روش دوم: با توجه به اینکه در حالت دوم نسبت به حالت اول مساحت سطح مقطع ثابت می‌ماند و فقط جرم تغییر می‌کند، می‌توان نوشت:

$$\frac{P_{۲B}}{P_{۱B}} = \frac{(m_A + m_B)}{m_B}$$

$$\frac{P_{۲B}}{P_{۱B}} = \frac{(\frac{۱}{۴}m_B + m_B)}{m_B} = \frac{۵}{۴}$$

۳۸. گزینه ۲ درست است.

ابتدا سهم فشار هوا در نیروی وارد بر پنجره را محاسبه می‌کنیم:

هوا به پنجره $F = P_۰ . A = ۱۰^۵ \times \underbrace{۵۰۰ \times ۱۰^{-۴}}_{m^۲} = ۵ \times ۱۰^۳ \ N = ۵\,kN$

این یعنی سهم فشار آب در نیروی وارده به پنجره، $۲۵/۵\,kN$ است که با ۲ برابر شدن عمق زیردریایی، طبق رابطهٔ

$$F = P.A = \rho g h \times A$$

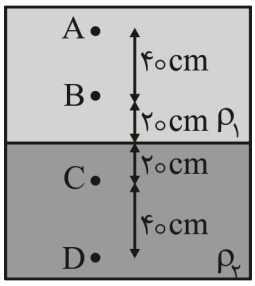
↓ ۲ برابر ↓ ۲ برابر

این سهم ۲ برابر شده و به $۵۱kN$ می‌رسد، درحالی‌که سهم فشار هوا در این نیرو تغییری نمی‌کند.

جدید $F = \underbrace{۲ \times ۲۵/۵}_{\text{سهم آب}} + \underbrace{۵}_{\text{سهم هوا}} = ۵۶\,kN$

۳۹. گزینه ۳ درست است.

با توجه به رابطه $P = \rho gh$، فشار یک نقطه درون یک مایع ساکن، به فاصلهٔ قائم آن نقطه از سطح آزاد مایع بستگی دارد.



$$P_D - P_C = \rho_۲ g \Delta h = ۰/۴ \rho_۲ g \ (I)$$

$$P_B - P_A = \rho_۱ g \Delta h = ۰/۴ \rho_۱ g \ (II)$$

طبق صورت سؤال می‌دانیم اختلاف فشار میان دو نقطه C و D، سه برابر اختلاف فشار میان دو نقطه A و B است؛ پس:

$$P_D - P_C = ۳(P_A - P_B) \xrightarrow[(II)]{(I)} ۰/۴\rho_۲ g = ۳\times ۰/۴\rho_۱ g \Rightarrow \rho_۲ = ۳\rho_۱ \ (*)$$

حال اختلاف فشار میان B و C را به‌دست می‌آوریم:

$$P_C - P_B = \rho_۲ g\Delta h_۲ + \rho_۱ g\Delta h_۱ \xrightarrow{(*)} P_C - P_B = ۳\rho_۱ g\times ۰/۲ + \rho_۱ g\times ۰/۲ \Rightarrow$$
$$P_C - P_B = ۰/۶\rho_۱ g + ۰/۲\rho_۱ g = ۰/۸\rho_۱ g$$

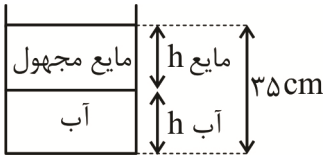
درنهایت داریم:

$$\frac{P_B - P_A}{P_C - P_B} = \frac{۰/۴\rho_۱ g}{۰/۸\rho_۱ g} = \frac{۱}{۲}$$

پس گزینه ۳ درست است.

۴۰. گزینه ۴ درست است.

در این سؤال‌ها که دو یا چند مایع مخلوط نشدنی در یک ظرف استوانه‌ای قرار گرفته‌اند، باید در ابتدا ارتفاع هر مایع را به‌دست آوریم: رابطه‌ی بین جرم‌ها را برحسب چگالی و حجم می‌نویسیم:



$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow m = \rho V = \rho Ah$$
$$\Rightarrow m_{\text{آب}}\ m_{\text{مایع}} \Rightarrow \rho_{\text{آب}}\ \cancel{A}\times h_{\text{آب}} = \rho_{\text{مایع}}\times \cancel{A}\times h_{\text{مایع}}$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{آب}}\ h_{\text{آب}} = \rho_{\text{مایع}}\ h_{\text{مایع}} \xrightarrow{\rho_{\text{مایع}} = \frac{۳}{۴}\rho_{\text{آب}}} \frac{\rho}{\text{آب}}\ h_{\text{آب}} = \frac{۳}{۴}\frac{\rho}{\text{آب}}\ h_{\text{مایع}} \rightarrow h_{\text{آب}} = \frac{۳}{۴}h_{\text{مایع}}\ (I)$$
$$h_{\text{آب}} + h_{\text{مایع}} = ۳۵\,cm\,(II)$$

همچنین می‌دانیم:

$$\xrightarrow{(I),(II)} \begin{cases} h_{\text{آب}} = \frac{۳}{۴}h_{\text{مایع}} \\ h_{\text{آب}} + h_{\text{مایع}} = ۳۵\,cm \end{cases} \Rightarrow h_{\text{مایع}} = ۲۰\,cm \text{ و } h_{\text{آب}} = ۱۵\,cm$$

$$\rho_{\text{مایع}} = \frac{۳}{۴}\rho_{\text{آب}} \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} = \frac{۳}{۴}\times ۱ = \frac{۳}{۴}\frac{g}{cm^۳} = ۰/۷۵\frac{g}{cm^۳}$$

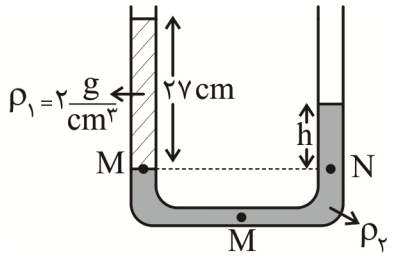
حال فشار کل مایع برکف ظرف را محاسبه می‌کنیم:

$$p_T = (\rho gh)_{\text{آب}} + (\rho gh)_{\text{مایع}}$$
$$\Rightarrow P_T = ۰/۷۵\times ۱۰^۳\times ۱۰\times ۲۰\times ۱۰^{-۲} + ۱\times ۱۰^۳\times ۱۰\times ۱۵\times ۱۰^{-۲} = ۱۵۰۰ + ۱۵۰۰ = ۳۰۰۰\,Pa$$

۴۱. گزینه ۱ درست است.

گام اول: قبل از ریختن مایع $\rho_۳$ با استفاده از اصل هم‌فشار بودن نقاط هم‌تراز در یک مایع می‌توان نتیجه گرفت:

$$P_M = P_N \rightarrow P_۰ + \rho_۱ gh_۱ = P_۲ gh + P_۰ \rightarrow \rho_۱ h_۱ = \rho_۲ h \quad (۱)$$



گام دوم: اگر مایع ρ_3 را در شاخه (۱) بریزیم سطح مایع ρ_2 در شاخه (۱) پایین و در شاخه (۲) بالا می‌رود تا در شاخه (۲) به اندازهٔ h بالاتر از شاخهٔ (۱) شود با توجه به اینکه در شاخه (۲) از مایع ρ_2 به اندازهٔ h نسبت به نقطه M بالاتر رفته است نتیجه می‌گیریم در این شاخه فشار به اندازهٔ $\rho_2 gh$ زیاد شده و برای نقطهٔ M نیز همین مقدار فشار افزایش یافته است.

با استفاده از معادلهٔ (۱) می‌توان نوشت: $\Delta P_M = \rho_2 gh = \rho_1 gh_1$

گام سوم: چون چگالی جیوه برابر $۱۳/۵ \frac{g}{cm^3}$ داده‌شده است، این اختلاف فشار را برحسب سانتی‌متر جیوه حساب می‌کنیم:

$$\rho_1 g h_1 = \rho_{\text{جیوه}} gh' \rightarrow ۲\times ۲۷ = ۱۳/۵ \times h' \rightarrow h' = ۴ \rightarrow \Delta P = ۴\,cm\,Hg$$

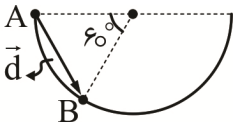
۴۲. گزینه ۱ درست است.

از شکل اولیه تست مشخص می‌شود که فشار هوا در محل، معادل فشار $۱۵۰cm$ ستون مایع موجود در ظرف است. با $۲۰cm$ وارد کردن لوله به ظرف، $۱۰cm$ طول فضای خلأ از بین رفته و طول ستون مایع در لوله به $۱۴۰cm$ می‌رسد این یعنی فشار در انتهای لوله معادل $۱۰cm$ ستون این مایع است.

$$F = P.A = \rho gh \times A = \underbrace{۷\times ۱۰^{۳}}_{\frac{kg}{m^3}} \times ۱۰ \times \underbrace{\frac{۱}{۱۰}}_{m} \times \underbrace{۲\times ۱۰^{-۴}}_{m^2} \Rightarrow F = ۱/۴\,N$$

۴۳. گزینه ۱ درست است.

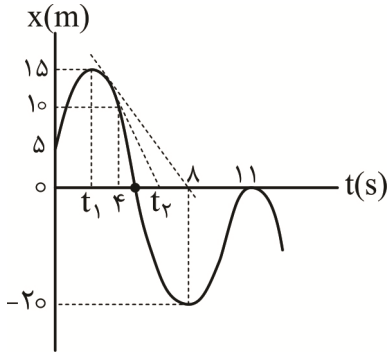
بردار جابه‌جائی، برداری است که مکان اولیه را مستقیماً به مکان نهایی جسم وصل می‌کند. مطابق شکل، مثلث متساوی‌الاضلاع خواهیم داشت:



$$|\vec{d}| = \text{شعاع} = R = ۲۰\,cm$$

$$V_{av} = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰ \frac{cm}{s}$$

۴۴. گزینه ۲ درست است.



بررسی گزینه‌ها:

الف- می‌دانیم اگر علامت مکان جسم تغییر کند، جهت بردار مکان نیز عوض می‌شود و نمودار $x-t$ اگر در نمودار محور t را قطع کند جهت بردار مکان عوض می‌شود، در این نمودار یک‌بار در لحظه t_2 تغییر جهت بردار مکان صورت گرفته است. (نادرست)

ب- برای محاسبه تندی متوسط، باید مسافت را حساب کرده و بر مدت‌زمان طی شدن مسافت تقسیم کنیم. (نادرست)

$$l = ۱۰+۱۵+۲۰+۲۰ = ۶۵\,m, S_{av} = \frac{۶۵}{۱۱} \frac{m}{s}$$

ج- شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ برابر سرعت و بزرگی آن برابر تندی در لحظهٔ موردنظر است: $S = \frac{۱۰}{۴} = ۲/۵ \frac{m}{s}$ (درست)

د- در لحظه‌های t_1، $۸s$ و $۱۱s$ جهت حرکت عوض شده است. (درست)

هـ- بنابر رابطه سرعت متوسط می‌توان نوشت. $V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۲۰-۵}{۸-۰} = -\frac{۲۵}{۸} \frac{m}{s}$ (نادرست)

۴۵. گزینه ۲ درست است.

هنگامی که متحرک در قسمت منفی محور xها قرار دارد، بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور xها است. به کمک تعیین علامت معادله مکان – زمان را تعیین می‌کنیم:

$$x = t^۲ - ۱۰t + ۲۴ \begin{cases} \rightarrow t_۱ = ۴s \\ \rightarrow t_۲ = ۶s \end{cases}$$

t		۴		۶	
x	+	۰	−	۰	+

پس در بازه زمانی $(۴s, ۶s)$ در قسمت منفی محور xها است و بردار مکان در خلاف جهت محور xها است.

$$\Delta t = ۶ - ۴ = ۲s$$

۴۶. گزینه ۱ درست است.

گام ۱: برای محاسبه جابه‌جایی باید بررسی کنیم آیا در بازه زمانی تعیین شده، متحرک تغییر جهت می‌دهد، یا خیر.

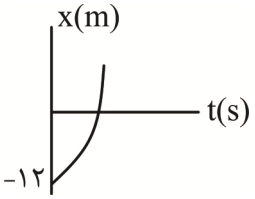
معادله $(x - t)$، معادله درجه دوم است؛ بنابراین ابتدا لحظه بیشینه یا کمینه (اکسترمم) آن را از رابطه $t_s = -\frac{b}{۲a}$ حساب می‌کنیم:

$$t_s = -\frac{۱}{۲}s$$

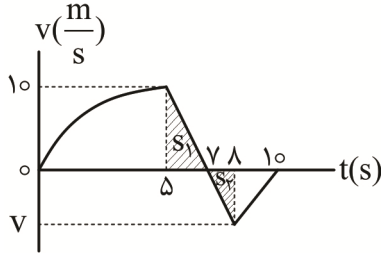
گام ۲: چون $t_s < ۰$ است، این لحظه جزء حرکت متحرک نیست؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت جهت حرکت متحرک در بازه زمانی $t > ۰$ تغییری نمی‌کند و اندازه جابه‌جایی با مسافت طی‌شده در هر بازه زمانی یکسان است.

توجه: در حرکت جسم روی خط راست، اگر جهت حرکت تغییر نکند، اندازه جابه‌جایی و مسافت برابرند.

روش دوم حل: با استفاده از رسم نمودار مکان - زمان می‌توان گفت متحرک در هیچ لحظه‌ای تغییر مکان نمی‌دهد؛ بنابراین مسافت طی‌شده با جابه‌جایی متحرک برابر است.



۴۷. گزینه ۴ درست است.



گام اول: از تشابه دو مثلث $S_۱$ و $S_۲$ استفاده می‌کنیم و سرعت متحرک در لحظه $t = ۸s$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۱۰ - ۰}{۰ - v} = \frac{۷ - ۵}{۸ - ۷} \rightarrow v = -۵\frac{m}{s}$$

گام دوم: با استفاده از رابط شتاب متوسط یعنی $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ مقدار آن را در بازهٔ ۰ تا ۸s حساب می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{-۵ - ۰}{۸ - ۰} = \frac{-۵}{۸} \rightarrow |a_{av}| = \frac{۵}{۸}$$

بررسی گزینه‌های نادرست:

- در ۵ ثانیه اول شیب خط مماس بر نمودار (که بیانگر شتاب متحرک است) در حال کاهش است و در لحظه $t = ۵s$ شیب خط مماس برابر صفر است، یعنی در لحظه $t = ۵s$ شتاب به صفر رسیده است.

- چون در بازهٔ $t = ۵s$ تا $t = ۸s$ شیب خط ثابت است؛ نتیجه می‌گیریم شتاب متوسط در این بازه برابر شتاب در هر لحظهٔ دلخواه بین $t = ۵s$ تا $t = ۸s$ است. $a_{av} = \frac{-۵ - ۱۰}{۸ - ۵} = \frac{-۱۵}{۳} = -۵\frac{m}{s^۲}$

- در بازهٔ زمانی $۸s$ تا $۱۰s$ حرکت کندشونده (اندازه سرعت درحال کاهش است) و در جهت منفی (علامت سرعت منفی) است و شیب خط این جهت نمودار مثبت است، پس در این بازه شتاب مثبت و در جهت محور است. (نادرست)

۴۸. گزینه ۲ درست است.

با توجه به نمودار، این متحرک ابتدا $۸m$ در جهت منفی محور x حرکت کرده و در ادامه پس از بازگشت به مکان اولیه، به حرکت خود در جهت مثبت محور x ادامه داده است. این $۸m$ رفت و برگشت، جمعاً $۱۶m$ مسافت را بیشتر از اندازه جابه‌جایی می‌کند.

$$?=s_{av}-v_{av}=\frac{\ell-|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲\frac{m}{s}$$

۴۹. گزینه ۴ درست است.

طبق صورت سؤال سرعت متوسط در بازه زمانی $۴s$ تا $۱۶s$ با سرعت در لحظه $t=۴s$ برابر است. مطابق شکل با توجه به شیب خط مماس در لحظهٔ $t=۴s$ داریم.

$$v(۴s)=\frac{۱۲-۴}{۴}=\frac{۲m}{s}$$

$$V_{av}(۴s-۱۶s)=v(۴s)\Rightarrow\frac{x_{۱۶s}-x_{۴s}}{۱۶-۴}=۲\Rightarrow\frac{x_{۱۶s}-۱۲}{۱۲}=۲\Rightarrow x(۱۶s)=۳۶m$$

حال سرعت متحرک را در لحظهٔ $t=۱۶s$ به‌دست می‌آوریم. با توجه به‌شیب خط مماس در لحظهٔ $t=۱۶s$ داریم:

$$v(۱۶s)=\frac{۳۶-۰}{۱۶-۸}=\frac{۳۶}{۸}=\frac{۹}{۲}\frac{m}{s}$$

حال سرعت متوسط متحرک را از بازهٔ صفر تا $۱۶s$ به‌دست می‌آوریم:

$$V_{av}(۰-۱۶s)=\frac{x_{۱۶s}-x_{۰}}{۱۶-۰}=\frac{۳۶-۰}{۱۶}=\frac{۹}{۴}\frac{m}{s}$$

$$\frac{V_{۱۶s}}{V_{av}(۰-۱۶s)}=\frac{\frac{۹}{۲}}{\frac{۹}{۴}}=\frac{۴}{۲}=۲$$

۵۰. گزینه ۳ درست است.

در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۳$ سرعت منفی و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است. در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$ شیب نمودار کاهش می‌یابد و در لحظه $t_۱$ سرعت متحرک صفر می‌شود. در این بازه زمانی $v>۰$ و $a<۰$ و درنتیجه $av<۰$ است و حرکت کندشونده است. در بازه زمانی $t_۲$ تا $t_۴$، علی‌رغم آنکه در لحظه $t_۳$، سرعت صفر شده است، اما متحرک تغییر جهت نداده است و در بازه زمانی $t_۱$ تا $t_۴$ متحرک در سوی منفی محور x $(v<۰)$ حرکت کرده است و فقط یک بار در لحظه $t_۱$، متحرک تغییر جهت داده است؛ بنابراین گزینه ۳ نادرست است.

۵۱. گزینه ۳ درست است.

می‌دانیم شتاب در هر لحظه، در واقع همان شیب نمودار سرعت – زمان است. در بازه زمانی $۸s<t<۲۰s$ حرکت متحرک کندشونده است؛ پس:

$$\left|a_{(۸s-۲۰s)}\right|=\left|\frac{۰-v}{۲۰-۸}\right|=\frac{v}{۱۲}$$

در بازه زمانی $۰<t<۶s$ حرکت متحرک تندشونده است؛ پس:

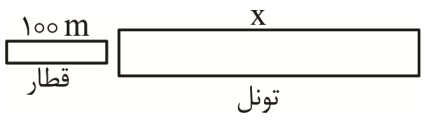
$$a_{(۰-۶s)}=\frac{v}{۶}$$

حالا داریم:

$$\frac{a_{(۸s-۲۰s)}}{a_{(۰-۶s)}}=\frac{\frac{v}{۱۲}}{\frac{v}{۶}}=\frac{۱}{۲}$$

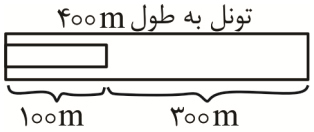
۵۲. گزینه ۳ درست است.

از فرض تست، ابتدا طول تونل را محاسبه می‌کنیم. عبور کامل قطار از تونل هنگامی رخ می‌دهد که انتهای قطار به انتهای تونل برسد. این یعنی انتهای قطار مسافتی معادل مجموع طول قطار و تونل را طی می‌کند:



$$\Delta x=v.t\Rightarrow ۱۰۰+x=۲۰\times ۲۵\Rightarrow x=۴۰۰m$$

از زمانی که قطار به‌طور کامل درون تونل است تا زمانی که ابتدای قطار از انتهای تونل خارج شود، قطار قابل مشاهده نیست:



$$\Delta x=v.t\Rightarrow ۳۰۰=۲۰\times t\Rightarrow t=۱۵s$$

به مدت $۱۵s$ قطار به‌طور کامل درون تونل بوده و دیده نمی‌شود.

۵۳. گزینه ۲ درست است.

روش اول:

گام ۱: معادله مکان - زمان هر دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_A=v_At+x_۰\Rightarrow x_A=v_At+۲$$

$$x_B=v_Bt+x_۰\Rightarrow x_B=v_Bt-۸$$

گام ۲: با توجه به آنکه فاصله دو متحرک از یکدیگر مشخص است، می‌توان نوشت:

$$\Delta x=x_B-x_A=۸\Rightarrow (v_B-v_A)t-۱۰=۸$$

گام ۳: با توجه به نمودار می‌توان از اطلاعات داده‌شده استفاده کرد. هر دو متحرک در $t=۵s$ به یکدیگر رسیده‌اند، یعنی $\Delta x=۰$ است؛ بنابراین:

$$(v_B-v_A)\times ۵-۱۰=۰\Rightarrow \overbrace{v_B-v_A}^{\Delta v}=۲$$

گام ۴: مقدار Δv به‌دست‌آمده را معادله گام ۲ قرار می‌دهیم:

$$۲t-۱۰=۸\Rightarrow t=۹s\Rightarrow ۹-۵=۴s$$

۵۴. گزینه ۴ درست است.

$$\Delta x=v.t\Rightarrow \text{در هر قسمت } t=\frac{\Delta x}{v}$$

این متحرک ابتدا مسافت d را در مدت $\frac{d}{۴۰}$ ثانیه طی کرده و سپس طولی مانند x را در مدت $\frac{x}{۲۰}$ ثانیه باز می‌گردد:

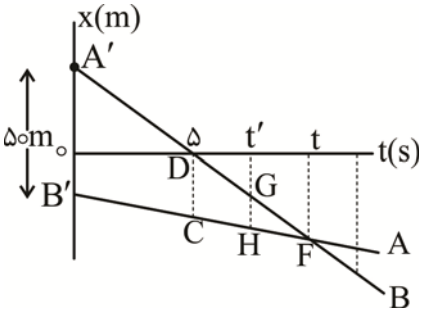
$$V_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۱۰=\frac{d-x}{\frac{d}{۴۰}+\frac{x}{۲۰}}\Rightarrow \frac{d}{۴}+\frac{x}{۲}=d-x$$

ضرب جملات در ۴

$$d + ۲x = ۴d - ۴x \Rightarrow ۶x = ۳d \Rightarrow x = \underbrace{\frac{d}{۲}}_{\times ۱۰۰} = \%۵۰\,d$$

پس باید $\%۵۰$ مسافت طی‌شده را باز گردد.

۵۵. گزینه ۴ درست است.



گام اول: در بازهٔ ۰ تا $۵s$ بردار مکان B مثبت و بردار مکان A در جهت منفی است و از $t = ۵s$ به بعد مکان هر دو متحرک منفی است.

گام دوم: از تشابه دو مثلث $A'B'F$ با DCF استفاده می‌کنیم و لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند (لحظه t) را حساب می‌کنیم. دقت کنید که در لحظه $t = ۵$ فاصله دو متحرک یعنی DC، به اندازهٔ $۲۰m$ کمتر از لحظه $t = ۱$ است؛ پس می‌توان نوشت:

$$DC = ۵۰ - ۲۰ = ۳۰m$$

$$S_{A'B'F} \sim S_{DCF} \Rightarrow \frac{۵۰}{۳۰} = \frac{t}{t-۵} \rightarrow t = ۱۲/۵s$$

گام سوم: اکنون لحظه‌ای که فاصله دو متحرک به ۱۰ متر می‌رسد را حساب می‌کنیم. در این مرحله نیز از تشابه مثلث‌های DCF و GHF استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۳۰}{۵۰} = \frac{۱۲/۵ - ۵}{۱۲/۵ - t'} \rightarrow t' = ۱۰s$$

گام چهارم: بین لحظهٔ $۱۰s$ تا $۱۲/۵s$ فاصله دو متحرک برابر ۱۰ متر و کمتر از آن است؛ یعنی مدت‌زمان $۲/۵$ ثانیه، اما همین مدت‌زمان پس از عبور آن‌ها از یکدیگر فاصله‌شان کمتر از ۱۰ متر و برابر ۱۰ متر است، پس در کل $۵s$ خواهد بود.

شیمی

۵۶. گزینه ۳ درست است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست است؛ زیرا ۴ سیارهٔ درونی منظومه خورشیدی از جنس سنگ و ۴ سیارهٔ بیرونی آن، گازی هستند. (ص ۳)

۲) درست است. (ص ۴)

۳) نادرست است؛ زیرا در ستاره‌ها طی واکنش‌های هسته‌ای، عنصرهای سبک‌تر به عنصرهای سنگین‌تر تبدیل می‌شوند.

۴) درست است؛ زیرا در ۸ عنصر نخست زمین و مشتری، گوگرد و اکسیژن مشترک هستند. درصد فراوانی این دو عنصر تقریباً یکسان است. اما به‌دلیل جرم بسیار زیاد مشتری، مقدار گوگرد در مشتری خیلی از زمین بیشتر است. (ص ۳)

۵۷. گزینه ۴ درست است.

عبارت اول درست است؛ شمار نوترون‌های یک عنصر $({}^{A}_{Z}E)$ از تفاضل عدد جرمی و عدد اتمی به‌دست می‌آید:

$$\text{شمار نوترون‌ها} = A - Z$$

عبارت دوم درست است؛ زیرا اتم عنصر $({}^{A}_{Z}E)$ دارای Z پروتون، Z الکترون و $A - Z$ نوترون است. پس مجموع شمار

ذرات زیراتمی آن برابر $Z+Z+A-Z=A+Z$ است.

عبارت سوم درست است؛ زیرا یون $^{A}_{Z}E^{n-}$ دارای Z پروتون، $Z+n$ الکترون و $A-Z$ نوترون است.

عبارت چهارم درست است؛ مجموع شمار ذرات زیراتمی $^{A}_{Z}E$ برابر $A+Z$ است:

$$A+Z=۱۸۰ \text{ یا } A=۱۸۰-Z$$

از طرف دیگر سؤال گفته شده $A=۱/۵Z+۵$، پس این دو عبارت را مساوی قرار می‌دهیم:

$$۱۸۰-Z=۱/۵Z+۵ \Rightarrow ۲/۵Z=۱۷۵ \Rightarrow Z=۷۰$$

$$A=(۱/۵\times ۷۰)+۵ \Rightarrow A=۱۱۰ \Rightarrow N=۱۱۰-۷۰=۴۰$$

(ص ۵)

۵۸. گزینه ۳ درست است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست است؛ زیرا برخی از عناصر رادیوایزوتوپ هستند اما نسبت $\frac{N}{P}$ در آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی ۱/۵ نیست. مانند:

تکنسیم $\left(^{۹۹}_{۴۳}TC\right) \Rightarrow \frac{N}{P}=\frac{۵۶}{۴۳}=۱/۳$ (ص ۶)

۲) نادرست است؛ زیرا امروزه همهٔ ^{۹۹}TC موجود در جهان به‌طور مصنوعی ساخته می‌شود. (ص ۷)

۳) درست است؛ زیرا ایزوتوپی از اورانیم که قابلیت استفاده به‌عنوان سوخت در راکتورهای اتمی را دارد ^{۲۳۵}U است که فراوانی آن ۰/۷ درصد است. بقیهٔ آن $۱۰۰-۰/۷=۹۹/۳$ درصد است که قابلیت استفاده به‌عنوان سوخت هسته‌ای را ندارد. (ص ۸)

۴) نادرست است؛ زیرا موقعیت یک عنصر در جدول تناوبی، اطلاعاتی دربارهٔ شمار نوترون‌های یک عنصر نمی‌دهد. (ص ۱۱)

۵۹. گزینه ۳ درست است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست است؛ زیرا دومین عنصر جدول تناوبی هلیم $(_۲He)$ است که یک گاز نجیب بوده و به گروه ۱۸ جدول تعلق دارد.

۲) درست است؛ زیرا عناصر با نماد تک‌حرفی دورهٔ دوم شامل B، C، N، O و F و عناصر با نماد تک‌حرفی دورهٔ سوم جدول شامل P و S است.

۳) نادرست است؛ زیرا مجموع شمار عنصرهای چهار دورهٔ اول جدول تناوبی برابر ۳۶ عنصر است.

دورهٔ جدول	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
شمار عنصرها	۲	۸	۸	۱۸	۱۸	۳۲	۳۲

۴) درست است؛ زیرا عدد اتمی آخرین عنصر جدول تناوبی ۱۱۸ است که دارای ۱۱۸ پروتون و ۱۱۸ الکترون است؛ پس مجموع شمار ذرات زیراتمی آن $۱۱۸+۱۱۸=۲۳۶$ است. (ص ۱۲)

۶۰. گزینه ۱ درست است.

ابتدا فراوانی‌ها را به هم تبدیل می‌کنیم:

ایزوتوپ	^{۱۸۰}X	^{۱۸۲}X	^{۱۸۲}X	^{۱۸۴}X
صورت سؤال	۲ ×۴	۳ ×۴	۴ ×۳	۵ ×۳
	۸	۱۲	۱۲	۱۵

بنابراین از $۸+۱۲+۱۵=۳۵$ اتم عنصر X، ۸ تای آن ^{۱۸۰}X، ۱۲ تا ^{۱۸۲}X و ۱۵ تا ^{۱۸۴}X است.

$$\text{درصد فراوانی } ^{۱۸۴}X=\frac{۱۵}{۳۵}\times ۱۰۰=\%۴۲/۸$$

$$\text{میانگین جرم اتمی } X=\frac{(۱۸۰\times ۸)+(۱۸۲\times ۱۲)+(۱۸۴\times ۱۵)}{۳۵}=۱۸۲/۴amu$$ (ص ۱۵)

۶۱. گزینه ۲ درست است.

ابتدا ۹۰ میلی‌گرم را به مول نیکوتین تبدیل می‌کنیم. (جرم مولی نیکوتین داده شده است.)

$$۹۰\,mg \times \frac{۱g}{۱۰^{۳}\,mg} \times \frac{۱mol}{۱۶۲g} = ۵/۵ \times ۱۰^{-۴}\,mol$$

اکنون جرم مولی نیکوتین را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم مولی نیکوتین} = (۱۲\times x)+(۱\times ۱۴)+(۱۴\times y) = ۱۲x+۱۴y+۱۴$$

این مقدار را مساوی ۱۶۲ گرم بر مول قرار می‌دهیم:

$$۱۲x+۱۴y+۱۴=۱۶۲ \Rightarrow ۱۲x+۱۴y=۱۴۸$$

از اینجا به بعد باید گزینه‌ها را چک کنیم:

$$\frac{x}{y}=۴ \begin{cases} x=۴\,,\ y=۱ & ۱۲x+۱۴y=۶۲ \quad \text{نادرست} \\ x=۸\,,\ y=۲ & ۱۲x+۱۴y=۱۲۴ \quad \text{نادرست} \end{cases}$$

$$\frac{x}{y}=۵ \begin{cases} x=۵\,,\ y=۱ & ۱۲x+۱۴y=۷۴ \quad \text{نادرست} \\ x=۱۰\,,\ y=۲ & ۱۲x+۱۴y=۱۴۸ \quad \text{درست} \end{cases}$$

(صفحات ۱۵ و ۱۶)

۶۲. گزینه ۴ درست است.

نخست جرم مولی این مواد را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم مولی}: CF_۴ = ۱۲+(۴\times ۱۹) = ۸۸g.mol^{-۱}$$

$$\text{جرم مولی}: COF_۲ = ۱۲+۱۶+(۲\times ۱۹) = ۶۶g.mol^{-۱}$$

$$\text{جرم مولی}: C_۲F_۴ = (۲\times ۱۲)+(۴\times ۱۹) = ۱۰۰g.mol^{-۱}$$

$$\text{جرم مولی}: CO_۲ = ۱۲+(۲\times ۱۶) = ۴۴g.mol^{-۱}$$

$$CF_۴ \text{ شمار اتم‌های} = ۱g\,CF_۴ \times \frac{۱mol\,CF_۴}{۸۸g\,CF_۴} \times \frac{۵\,mol\,atom}{۱mol\,CF_۴} = ۰/۰۵۸\,mol$$

$$COF_۲ \text{ شمار اتم‌های} = ۱g\,COF_۲ \times \frac{۱mol\,COF_۲}{۶۶g\,COF_۲} \times \frac{۴\,mol\,atom}{۱mol\,COF_۲} = ۰/۰۶۰\,mol$$

$$C_۲F_۴ \text{ شمار اتم‌های} = ۱g\,C_۲F_۴ \times \frac{۱mol\,C_۲F_۴}{۱۰۰g\,C_۲F_۴} \times \frac{۶\,mol\,atom}{۱mol\,C_۲F_۴} = ۰/۰۶\,mol$$

$$CO_۲ \text{ شمار اتم‌های} = ۱g\,CO_۲ \times \frac{۱mol\,CO_۲}{۴۴g\,CO_۲} \times \frac{۳\,mol\,atom}{۱mol\,CO_۲} = ۰/۰۶۸\,mol$$

ماده‌ای دارای اتم‌های بیشتری است که تعداد مول بیشتری از اتم‌ها را دارا باشد. (صفحات ۱۶ تا ۲۰)

۶۳. گزینه ۲ درست است.

عبارت «الف» درست است؛ زیرا چشم ما قادر است گسترهٔ نور مرئی یعنی ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر را ببیند. اجسام کوچک‌تر از ۴۰۰ نانومتر را نمی‌توان با نور مرئی دید. (ص ۲۰)

عبارت «ب» نادرست است؛ زیرا مدل اتمی بور، توانایی توجیه طیف نشری خطی همهٔ عناصر را نداشت و تنها برای اتم هیدروژن قابل استفاده بود. (ص ۲۴)

عبارت «ج» درست است؛ زیرا رنگ شعله یک فلز و همهٔ نمک‌های آن یکسان است. (ص ۲۲)

عبارت «د» نادرست است؛ زیرا تعداد و جایگاه نوارهای رنگی در گسترهٔ مرئی یک عنصر هیچ ارتباطی با جایگاه آن عنصر در جدول تناوبی ندارد. (ص ۲۳)

۶۴. گزینه ۳ درست است.

هر چه طول موج پرتو کوتاه‌تر باشد، زاویهٔ شکست آن در منشور بیشتر است. (شکل صفحه ۲۰)

بازگشت الکترون از $n=۲$ به $n=۱$ پرتوهای فرابنفش تابش می‌کند که در گسترهٔ مرئی نیست. بازگشت الکترون از $n=۴$ به $n=۳$ هم پرتوهای فروسرخ تابش می‌کند که باز هم در گسترهٔ مرئی نیست. بین گزینه‌های ۲ و ۳، تفاوت سطح انرژی $n=۶ \rightarrow n=۲$ بیشتر از $n=۳ \rightarrow n=۲$ است. پس طول موج پرتو مرئی تابش‌شده از $n=۶$ به $n=۲$ کوتاه‌تر است و انحراف آن در منشور بیشتر است. (صفحات ۲۰، ۲۷)

۶۵. گزینه ۲ درست است.

عبارت «الف» نادرست است؛ زیرا لایهٔ الکترونی nام دارای n زیرلایه با عدد کوانتومی فرعی «l» متفاوت است. برای مثال:

$$n=۳ \Rightarrow l=۰ \ , \ l=۱ \ , \ l=۲$$

عبارت «ب» درست است؛ زیرا بیشترین گنجایش الکترونی یک لایه، $۲n^۲$ است.

عبارت «ج» درست است؛ زیرا بیشترین گنجایش الکترونی یک زیرلایه با عدد کوانتومی l از رابطه $۲(۲l+۱)=۴l+۲$ پیروی می‌کند که در آن $l \geq ۰$ است.

عبارت «د» نادرست است؛ زیرا مطابق قاعدهٔ آفبا، زیرلایه‌ای زودتر الکترون می‌پذیرد که مجموع $n+l$ کوچک‌تری داشته باشد.

(صفحات ۲۷، ۲۸، ۲۹)

۶۶. گزینه ۳ درست است.

لایهٔ سوم $(n=۳)$ شامل زیرلایه‌های $۳s$، $۳p$ و $۳d$ است. برای اینکه لایهٔ سوم اتم عنصری ۱۸ الکترون داشته باشد، باید تمام زیرلایه‌های این لایه از الکترون پر باشند $(۳d^{۱۰}, ۳p^۶, ۳s^۲)$. نخستین عنصری که زیرلایهٔ $۳d$ آن پر می‌شود، اتم مس با عدد اتمی ۲۹ است. $_{۲۹}Cu[Ar]۳d^{۱۰}۴s^۱$ (صفحات ۳۰، ۳۱)

۶۷. گزینه ۲ درست است.

وقتی این اتم‌ها، ایزوتوپ یکدیگر هستند، باید عدد اتمی برابری داشته باشند:

$$۲n+۶=۲m-۴ \Rightarrow ۲m-۲n=۱۰ \Rightarrow m-n=۵$$

یون $^{۴m-۳}_{۲n+۶}X^{۳+}$ دارای $۲n+۶$ پروتون و $۲n+۶-۳=۲n+۳$ الکترون و $۴m-۳-۲n-۶=۴m-۲n-۹$ نوترون است.

مجموع شمار این ذرات برابر ۸۰ است.

$$۲n+۶+۲n+۳+۴m-۲n-۹=۸۰$$
$$۲n+۴m=۸۰ \Rightarrow n+۲m=۴۰$$
$$\begin{cases} m-n=۵ \\ n+۲m=۴۰ \end{cases} \Rightarrow m=۱۵ \ , \ n=۱۰$$

بنابراین، این ایزوتوپ‌ها $^{۵۷}_{۲۶}X$ و $^{۵۶}_{۲۶}Y$ هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) درست است. شمار الکترون : $_{۲۶}Y^{۲+}$ $= ۲۶-۲=۲۴$

۲) نادرست است. $_{۲۶}X[Ar]۳d^۶۴s^۲ \rightarrow$ شمارهٔ گروه $= ۸$

۳) درست است. $^{۵۶}_{۲۶}Y$ شمار نوترون‌ها $= ۵۶-۲۶=۳۰$

۴) درست است. $$\frac{nm}{n+m}=\frac{۱۰\times۱۵}{۱۰+۱۵}=\frac{۱۵۰}{۲۵}=۶$$

(صفحات ۵، ۳، ۳۲)

۶۸. گزینه ۱ درست است.

نخست آرایش الکترونی این عنصرها را به‌دست می‌آوریم:

$X = ۱s^۲ ۲s^۲ ۲p^۶ ۳s^۲ ۳p^۲ \qquad Z = ۱۴$

$Y = ۱s^۲ ۲s^۲ ۲p^۶ ۳s^۲ ۳p^۶ ۳d^۲ ۴s^۲ \quad Z = ۲۲$

$E = ۱s^۲ ۲s^۲ ۲p^۶ ۳s^۲ ۳p^۶ ۳d^{۱۰} ۴s^۱ \quad Z = ۲۹$

$M = ۱s^۲ ۲s^۲ ۲p^۶ ۳s^۲ ۳p^۶ ۳d^۶ ۴s^۲ \quad Z = ۲۶$

عبارت اول درست است.

عبارت دوم درست است. دورهٔ چهارم جدول تناوبی با عدد اتمی ۱۹ شروع می‌شود. پس عدد اتمی ۲۲، چهارمین عنصر این دوره است.

عبارت سوم درست است. آرایش الکترونی اتم مس $(Z = ۲۹)$ از قاعدهٔ آفبا پیروی نمی‌کند.

عبارت چهارم درست است.

$_{۲۶}M = [Ar]۳d^۶ ۴s^۲ \Rightarrow M^{۳+} = [Ar]۳d^۵$

$l = ۲ \rightarrow d$ زیرلایهٔ $\rightarrow$ تعداد الکترون $= ۵$

(صفحات ۳، ۳۲)

۶۹. گزینه ۴ درست است.

مطلب «الف» نادرست است.

$_{۲۵}M : [Ar]\underbrace{۳d^۵ ۴s^۲}_{\text{لایه ظرفیت}} \Rightarrow \text{الکترون ظرفیت} = ۲ + ۵ = ۷$

$_{۱۵}Z : [Ne]\underbrace{۳s^۲ ۳p^۳}_{\text{لایه ظرفیت}} \Rightarrow \text{الکترون ظرفیت} = ۲ + ۳ = ۵$

مطلب «ب» درست است؛ زیرا عنصری با ۱۱ الکترون در زیرلایه‌های $p \ (l = ۱)$، اتم کلر است:

$_{۱۷}Cl = ۱s^۲ ۲s^۲ ۲p^۶ ۳s^۲ \ ۳p^۵ \qquad l = ۱ \Rightarrow ۲p^۶, ۳p^۵$

که آرایش الکترون - نقطه‌ای آن به‌صورت $\cdot\ddot{Cl}:$ است.

مطلب «ج» درست است؛ زیرا عناصر گروه‌های ۱۳ و ۱۵ دارای سه الکترون جفت‌نشده هستند که به‌ترتیب یون‌های $X^{۳+}$ و $X^{۳-}$ تشکیل می‌دهند.

مطلب «د» درست است.

$_{۲۹}Cu[Ar]۳d^{۱۰} ۴s^۱ \rightarrow Cu^{۲+}[Ar]۳d^۹$

یک الکترون از زیرلایهٔ ۴s جدا شده است: $۴s^۱ : (n + l = ۴)$

یک الکترون از زیرلایهٔ ۳d جدا شده است: $۳d : (n + l = ۵) \Rightarrow ۴ + ۵ = ۹$

(صفحات ۳۲، ۳۳، ۳۵)

۷۰. گزینه ۳ درست است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست است؛ زیرا شمار ذرات زیراتمی عنصر $_{۲۴}M$ برابر باشد، باید عدد اتمی آن ۱۲ و متعلق به گروه دوم جدول تناوبی باشد. عناصر این گروه کاتیون $M^{۲+}$ تشکیل می‌دهند که فرمول نیترید $(N^{۳-})$ آن‌ها به‌صورت $M_۳N_۲$ است. (ص ۳۷)

۲) درست است؛ زیرا مولکول متان $(CH_۴)$ دارای چهار پیوند کووالانسی و مولکول اکسیژن $(O_۲)$ دارای دو پیوند کووالانسی است. (ص ۴۱)

۳) نادرست است؛ زیرا اگر سمت چپ یک ترکیب شیمیایی فلز بود آن ترکیب یک ترکیب یونی دوتایی است، پس CaO و FeO ترکیب یونی و CO، N_2O ترکیب مولکولی هستند. (ص ۳۸)

۴) درست است؛ زیرا آرایش الکترون- نقطه‌ای اتم X به‌صورت $\cdot\ddot{\underset{\cdot}{X}}\cdot$ است که ۵ الکترون در لایه ظرفیت خود دارد، پس به گروه ۱۵ جدول تعلق دارد. (صفحات ۴۰، ۴۱)

۷۱. گزینه ۱ درست است.

عبارت اول درست است. (ص ۳)

عبارت دوم نادرست است؛ زیرا عسل حاوی مولکول‌های گلوکز است که در ساختار خود گروه هیدروکسیل $(-OH)$ دارند. (ص ۴)

عبارت سوم نادرست است؛ زیرا سدیم‌کلرید یک ترکیب یونی است و نیروی جاذبه میان ذرات آن پیوند یونی است. اما اوره یک ترکیب مولکولی است و نیروی جاذبه میان مولکوهای آن از نوع پیوند هیدروژنی است. (ص ۵)

عبارت چهارم نادرست است؛ زیرا وازلین و بنزین حل می‌شود. اتیلن‌گلیکول هم در اتانول حل می‌شود. در ضمن وازلین و بنزین ناقطبی هستند در صورتی‌که اتیلن‌گلیکول و اتانول قطبی هستند. (صفحات ۴، ۵)

۷۲. گزینه ۴ درست است.

$$R-COONa \ , \ R=C_nH_{2n+1} \ , \ n=15$$

$$C_{15}H_{31}COONa \quad \text{یا} \quad C_{16}H_{31}O_2Na$$

$$2C_{16}H_{31}O_2Na(aq)+Ca^{2+}(aq)\rightarrow (C_{16}H_{31}O_2)_2Ca(s)+2Na^{+}(aq)$$

جرم مولی رسوب $(C_{16}H_{31}O_2)_2Ca=550\,g.mol^{-1}$

$$0/4g\,Ca^{2+}\times\frac{1mol\,Ca^{2+}}{40\,g\,Ca^{2+}}\times\frac{1mol\ \text{رسوب}}{1mol\,Ca^{2+}}\times\frac{550\,g\ \text{رسوب}}{1mol\ \text{رسوب}}=5/5g \quad \text{رسوب}$$

(صفحات ۵، ۶)

۷۳. گزینه ۲ درست است.

مطلب «الف» درست است؛ زیرا آنیون صابون، $R-COO^-$ و قسمت باردار آن $-COO^-$ است که سبب پخش شدن ذرات چربی در آب می‌شود. (ص ۶)

مطلب «ب» نادرست است؛ زیرا اسیدهای چرب دارای زنجیر هیدروکربنی بلندی هستند (حداقل ۱۴ اتم کربن)، پس $CH_3-(CH_2)_2\ COOH$ اسید چرب نیست و نمک سدیم آن هم خاصیت پاک‌کنندگی ندارد. زیرا بخش ناقطبی آن در چربی خوب حل نمی‌شود. (ص ۵)

مطلب «ج» نادرست است؛ زیرا اگر صابونی در آب خوب کف نکرد، غلظت یون Ca^{2+} یا Mg^{2+} در آب زیاد است و این موضوع هیچ ربطی به غلظت یون Na^+ ندارد و نمی‌توان در آب سخت غلظت این دو یون را مقایسه کرد. (ص ۹)

مطلب «د» درست است؛ زیرا بخش آنیونی صابون $R-COO^-$ است $(R-\overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{C}}(=\overset{\cdot\cdot}{O})-\overset{\cdot\cdot}{O}:)$ که دارای ۵ جفت الکترون ناپیوندی است.

(ص ۶)

۷۴. گزینه ۲ درست است.

نمک‌های فسفات با رسوب دادن یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} آب سخت، قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهند. (ص ۱۲)

۷۵. گزینه ۳ درست است.

عبارت اول درست است؛ زیرا کلوئیدها، از توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت ساخته شده‌اند. (ص ۷)

عبارت دوم نادرست است؛ زیرا پاک‌کننده‌های صابونی را می‌توان از گرم کردن روغن‌های گیاهی یا جانوری با سدیم هیدروکسید تهیه کرد. پاک‌کننده‌های غیرصابونی از بنزن و مواد پتروشیمیایی دیگر تهیه می‌شوند. (ص ۱۰)

عبارت سوم درست است؛ زیرا زنجیر هیدروکربنی صابون ناقطبی است. چربی هم مولکول‌های ناقطبی دارد. از این رو با یکدیگر جاذبه وان‌دروالسی برقرار می‌کنند. (ص ۸)

عبارت چهارم درست است؛ زیرا پارچه‌های نخی از الیاف سلولز ساخته شده‌اند که ساختار قطبی دارند و چربی با ساختار ناقطبی جاذبه خیلی قوی با آن‌ها تشکیل نمی‌دهد. (ص ۸)

۷۶. گزینه ۳ درست است.

پاک‌کنندهٔ غیرصابونی: $R-C_6H_4-SO_3Na$

$R=C_nH_{2n+1}\ ,\ n=13 \Rightarrow C_{13}H_{27}C_6H_4SO_3Na$

جرم مولی پاک‌کننده غیرصابونی $=C_{19}H_{31}SO_3Na=362\,g.mol^{-1}$

چون گفته کلاً ۱۸ اتم کربن دارد، پس R باید ۱۷ کربن داشته باشد. پاک‌کننده صابونی: $R-COONa$

$R=C_nH_{2n+1}\ ,\ n=17 \Rightarrow C_{17}H_{35}COONa$

جرم مولی پاک‌کننده صابونی $=C_{18}H_{35}O_2Na=306\,g.mol^{-1}$

$362-306=56$

(ص ۱۱)

۷۷. گزینه ۱ درست است.

مطلب «الف» الزاماً درست نیست؛ زیرا باید شمار اتم‌های کربن در زنجیر R آن زیاد باشد تا خاصیت پاک‌کنندگی داشته باشد. (ص ۱۱)

مطلب «ب» درست است؛ زیرا سدیم‌هیدروکسید $(NaOH)$ و جوهرنمک (HCl) پاک‌کنندهٔ خورنده هستند و با آلاینده‌ها واکنش می‌دهند. (ص ۱۲)

مطلب «ج» نادرست است؛ زیرا ترکیب (۳) یک اسید (جوهرنمک) و ترکیب (۴) هم یک اسید چرب است که با هم واکنش نمی‌دهند. (ص ۱۲)

مطلب «د» درست است؛ زیرا اسید معده هیدروکلریک اسید (HCl) است. (ص ۱۳)

۷۸. گزینه ۲ درست است.

ردیف «۱» نادرست است؛ زیرا در اثر واکنش SO_3 با آب، یک مول SO_4^{2-} تولید می‌شود.

ردیف «۲» نادرست است؛ زیرا در اثر واکنش BaO با آب، دو مول یون OH^- تولید می‌شود.

ردیف «۳» درست است؛ زیرا N_2O_5 یک اکسید نافلزی یا اکسید اسیدی است که رنگ کاغذ pH را سرخ می‌کند و یک مول آن در آب ۲ مول H^+ و ۲ مول NO_3^- تولید می‌کند.

$$N_2O_5(s)+H_2O(l)\rightarrow 2H^+(aq)+2NO_3^-(aq)$$

ردیف «۴» نادرست است؛ زیرا هر مول Li_2O در آب، ۲ مول یون Li^+ و ۲ مول یون OH^- تولید می‌کند.

۷۹. گزینه ۳ درست است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست است؛ زیرا واکنش Al با $NaOH$ همراه با آب، تولید گاز هیدروژن (H_2) می‌کند.

۲) نادرست است؛ زیرا بازها در تماس با پوست احساس لیزی ایجاد می‌کنند. (ص ۱۴)

۳) درست است. (ص ۱۴)

۴) نادرست است؛ زیرا ورود فاضلاب‌های صنعتی می‌توانند سبب کاهش یا افزایش pH آب‌ها شود.

۸۰. گزینه ۲ درست است.

یون H^+ در آب به‌صورت یون H_3O^+ نشان داده می‌شود و خاصیت بازی محلول سدیم‌هیدروکسید به یون هیدروکسید (OH^-) نسبت داده می‌شود.