اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

سنجش دوازدهم

آزمـــون ۴ از ۱۴

شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی سنجش دوازدهم ـ مرحلهٔ دوم (۱۴۰۲/۰۸/۱۹)

علوم ریاضی و فنی (دوازدهم)

ویــــژهٔ پــــایــــهٔ دوازدهــــم

کارنامهٔ آزمون، عصر روز برگزاری آن از طریق سایت اینترنتی زیر قابل مشاهده می‌باشد:

www.sanjeshserv.ir

مدیران، مشاوران و دبیران محترم دبیرستان‌ها و مراکز آموزشی

به منظور فراهم نمودن زمینهٔ ارتباط مستقیم مدیران، مشاوران و دبیران محترم دبیرستان‌ها و مراکز آموزشی همکار در امر آزمون‌های آزمایشی سنجش و بهره‌مندی از نظرات ارزشمند شما عزیزان در خصوص این آزمون‌ها ، آدرس پست الکترونیکی test@sanjeshserv.com معرفی می‌گردد. از شما عزیزان دعوت می‌شود، دیدگاه‌های ارزشمند خود را از طریق آدرس فوق با مدیر تولیدات علمی و آموزشی این مجموعه در میان بگذارید.

کانال‌های ارتباطی:
@sanjesheducationgroup
@sanjeshserv

ریاضیات

۱. گزینه ۱ درست است.

ابتدا دو طرف تساوی را طرفین وسطین می‌کنیم:

$$3\cos^2 x - 2\sin^2 x + 1 = -4\cos^2 x + 6\sin^2 x + 2$$
$$\Rightarrow 7\cos^2 x - 8\sin^2 x = 1 \Rightarrow 7(1-\sin^2 x) - 8\sin^2 x = 1$$
$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{5} \Rightarrow \cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{2}$$

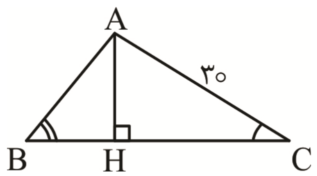
۲. گزینه ۴ درست است.

مقادیر هریک از نسبت‌های مثلثاتی را پیدا می‌کنیم:

$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\frac{5\pi}{3} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$
$$\tan\frac{5\pi}{4} = \tan(\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$
$$\sin\frac{7\pi}{2} = \sin(3\pi + \frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$
$$\cot\frac{17\pi}{6} = \cot(3\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = (\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}) + m = m + \frac{3}{4} \\ B = (-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) + m = m + 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{m+\frac{3}{4}}{m+3} = \frac{4m+3}{4m+12} = \frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow 40m + 30 = 4m + 12 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

۳. گزینه ۱ درست است.



$$\cos\hat{C} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow 0/8 = \frac{CH}{30} \Rightarrow CH = 24$$
$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{900 - 576} = \sqrt{324} = 18$$
$$\tan\hat{B} = \frac{AH}{BH} \Rightarrow 1/5 = \frac{18}{BH} \Rightarrow BH = 12 \Rightarrow BC = BH + CH = 36$$

مساحت مثلث برابر $\frac{1}{2}CA\times CB\times\sin\hat{C}$ است؛ پس:

$$S = \frac{1}{2}\times 30\times 36\times 0/6 = 324$$

۴. گزینه ۳ درست است.

فرض کنید $p = \sin a\cos a$ است؛ در این‌صورت:

$$\tan a + \cot a = \frac{1}{\sin a\cos a} = \frac{1}{p}$$

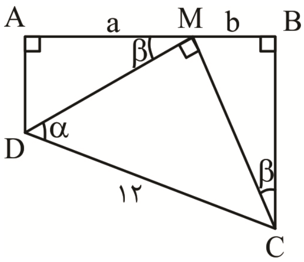
به توان ۲: $\tan^2 a + \cot^2 a + 2 = \frac{1}{p^2} \Rightarrow \tan^2 a + \cot^2 a = \frac{1}{p^2} - 2$

به توان ۲: $\underbrace{\tan^۴ a+\cot^۴ a}_{۴۷}+۲=(\frac{۱}{p^۲}-۲)^۲ \Rightarrow (\frac{۱}{p^۲}-۲)^۲=۴۹$

$$\Rightarrow \frac{۱}{p^۲}-۲=۷ \Rightarrow p^۲=\frac{۱}{۹} \Rightarrow p=\pm\frac{۱}{۳}$$

$$\sin^۶ a+\cos^۶ a=۱-۳\sin^۲ a\cos^۲ a=۱-۳p^۲=۱-\frac{۳}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

۵. گزینه ۲ درست است.



$$\begin{cases} DM=DC.\cos\hat{\alpha}=۱۲\cos\hat{\alpha} \\ a=AM=DM\cos\hat{\beta}=۱۲\cos\hat{\alpha}\cos\hat{\beta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} MC=DC.\sin\hat{\alpha}=۱۲\sin\hat{\alpha} \\ b=BM=MC.\sin\hat{\beta}=۱۲\sin\hat{\alpha}\sin\hat{\beta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ab=۱۲\cos\hat{\alpha}\cos\hat{\beta}\times ۱۲\sin\hat{\alpha}\sin\hat{\beta}$$

$$=۶\times۶(\sin۲\hat{\alpha})(\sin۲\hat{\beta})=۳۶\times\sin۱۵۰^\circ\times\sin۴۵^\circ=۳۶\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۹\sqrt{۲}$$

۶. گزینه ۲ درست است.

طول AB برابر $۲T$ یعنی دو برابر دوره تناوب است و ارتفاع مثلث برابر ماکزیمم تابع، یعنی ۴ است.

$$S=\frac{۱}{۲}h_c\times AB=\frac{۱}{۲}\times۴\times۴\pi=۸\pi$$

۷. گزینه ۲ درست است.

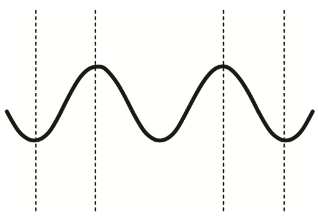
نکته ۱: $۲\cos^۲\alpha=۱+\cos۲\alpha$

نکته ۲:

$$y=c+a\cos bx \Rightarrow \begin{cases} \max=c+|a| \\ \min=c-|a| \\ T=\frac{۲\pi}{|b|} \end{cases}$$

$$y=۴-(۱+\cos\frac{۲\pi}{a}x)=۳-\cos\frac{۲\pi}{a}x$$

$$T=\max \Rightarrow \frac{۲\pi}{|\frac{۲\pi}{a}|}=۳+۱ \Rightarrow |a|=۴$$



محور تقارن‌های نمودار کسینوس، از نقاط $\max$ و $\min$ عبور می‌کنند.

$$\cos\frac{۲\pi}{a}x=\pm۱ \Rightarrow \frac{۲\pi}{a}x=k\pi \xrightarrow{|a|=۴} x=۲k$$

فقط گزینه ۲ به‌صورت $x=۲k$ است. $(k\in z)$

۸. گزینه ۴ درست است.

نمودار، از مبدأ عبور می‌کند؛ پس:

$$f(۰)=۰ \Rightarrow ۲+a\cos\frac{\pi}{۳}=۰ \Rightarrow a=-۴$$

نمودار $\cos x$ ابتدا به‌سمت چپ می‌رود و سپس به‌اندازهٔ $|b|$ در راستای افقی منقبض می‌شود و چون $a<۰$ است، پس $b<۰$ است. (شیب نمودار در $x=۰$ منفی است.)

$x = \frac{۴\pi}{۳}$ سومین نقطه برخورد نمودار با محور xها، در سمت راست محور yها است.

$$f(x) = ۲ - ۴\cos(bx + \frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow \cos(bx + \frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos(-bx - \frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{سومین جواب}} -bx - \frac{\pi}{۳} = \frac{۷\pi}{۳} \Rightarrow -b(\frac{۴\pi}{۳}) = \frac{۸\pi}{۳} \Rightarrow b = -۲ \Rightarrow a + b = -۶$$

۹. گزینه ۱ درست است.

با فرض $x \neq \frac{k\pi}{۲}$ رابطه $\tan x + \cot x = \frac{۲}{\sin ۲x}$ برقرار است:

$$f(x) = ۲(\frac{۲}{\tan ax + \cot ax}) = ۲\sin ۲ax$$

$$T = \pi a = \frac{۲\pi}{۲a} \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

توجه: چون f در همسایگی مبدأ صعودی است، پس $a > ۰$ است.

$$\Rightarrow f(x) = ۲\sin ۲x \Rightarrow f(\frac{۱۷\pi}{۱۲}) = ۲\sin\frac{۱۷\pi}{۶} = ۲(\frac{۱}{۲}) = ۱$$

۱۰. گزینه ۳ درست است.

فرض کنید $t = ۸۱^{\sin^۲ x}$ باشد:

$$۸۱^{\sin^۲ x} + ۸۱^{۱-\sin^۲ x} = ۳۰ \Rightarrow t + \frac{۸۱}{t} = ۳۰ \Rightarrow t^۲ - ۳۰t + ۸۱ = ۰ \Rightarrow (t-۲۷)(t-۳) = ۰$$

$$۱)\ t = ۲۷ \Rightarrow ۸۱^{\sin^۲ x} = ۲۷ \Rightarrow ۳^{۴\sin^۲ x} = ۳^۳ \Rightarrow ۴\sin^۲ x = ۳ \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

چهار جواب دارد.

$$۲)\ t = ۳ \Rightarrow ۸۱^{\sin^۲ x} = ۳ \Rightarrow ۳^{۴\sin^۲ x} = ۳^۱ \Rightarrow ۴\sin^۲ x = ۱ \Rightarrow \sin x = \pm\frac{۱}{۲}$$

۱۱. گزینه ۳ درست است.

سمت چپ تساوی را تجزیه می‌کنیم:

$$\sin x + \sin x\cos x + \cos x + ۱ = ۰$$

$$\sin x(۱ + \cos x) + (\cos x + ۱) = ۰$$

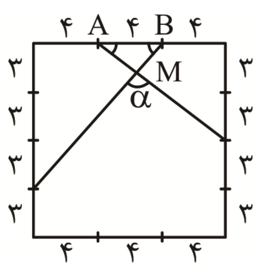
$$(۱ + \cos x)(\sin x + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -۱ \Rightarrow x = \pi \\ \sin x = -۱ \Rightarrow x = \frac{۳\pi}{۲} \end{cases} \Rightarrow \text{جمع} = \frac{۵\pi}{۲}$$

۱۲. گزینه ۴ درست است.

طول ضلع مربع را ۱۲ واحد فرض می‌کنیم:

در مثلث ABM شکل مقابل، $\tan\hat{A} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$ و $\tan\hat{B} = \frac{۹}{۸}$ است.



$$\hat{\alpha}=\pi-(\hat{A}+\hat{B})\Rightarrow \tan\hat{\alpha}=-\tan(\hat{A}+\hat{B})$$

$$\Rightarrow \tan\hat{\alpha}=-\frac{\tan\hat{A}+\tan\hat{B}}{۱-\tan\hat{A}\tan\hat{B}}=-\frac{\frac{۳}{۴}+\frac{۹}{۸}}{۱-(\frac{۳}{۴}\times\frac{۹}{۸})}=\frac{-۶۰}{۳۲-۲۷}=-۱۲$$

۱۳. گزینه ۱ درست است.

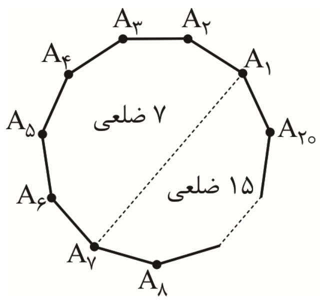
نمودار تابع، صعودی است؛ پس $a>۰$ است.

$$T=\frac{\pi}{a}\Rightarrow x_B=\frac{۱}{۲}T=\frac{\pi}{۲a}$$

$$y=۰\Rightarrow \tan ax=-۱\Rightarrow ax_A=-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x_A=-\frac{\pi}{۴a}\Rightarrow x_B-x_A=\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۲a}+\frac{\pi}{۴a}=\pi\Rightarrow \frac{۳\pi}{۴a}=\pi\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۱۴. گزینه ۱ درست است.

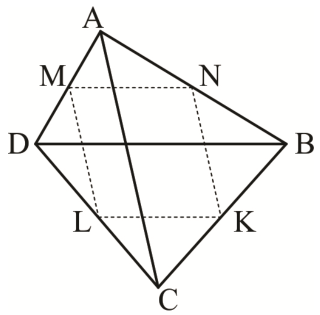


فرض کنیم قطر $A_۱A_۷$ از ۲۰ ضلعی مقابل رسم شده است. اگر تعداد قطرهای یک n ضلعی برابر ۱۴ باشد، پس:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=۱۴\Rightarrow n(n-۳)=۲۸=۷\times۴\Rightarrow n=۷$$

پس یکی از این دو چندضلعی پدیدآمده، هفت‌ضلعی است که $A_۱A_۷$ ضلعی از آن است؛ یعنی ۶ ضلع از ۲۰ ضلعی استفاده شده و $۱۴=۶-۲۰$ ضلع از آن باقی‌مانده که همراه با ضلع مشترک $A_۱A_۷$، روی هم یک ۱۵ ضلعی را می‌سازند. درنتیجه تعداد قطرهای این ۱۵ ضلعی برابر است با: $\frac{۱۵\times(۱۵-۳)}{۲}=\frac{۱۵\times۱۲}{۲}=۹۰$

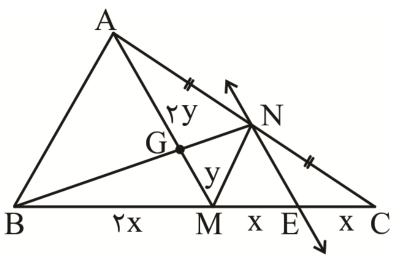
۱۵. گزینه ۴ درست است.



بنابر تمرین ۷ صفحهٔ ۶۴ کتاب هندسهٔ ۱، می‌دانیم که از به هم وصل کردن وسط‌های ضلع‌های یک چهارضلعی دلخواه، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید که محیط آن، برابر با مجموع اندازه‌های دو قطر چهارضلعی است (اندازهٔ هر قطر، برابر جمع اندازه‌های دو ضلع روبه‌روی متوازی‌الاضلاع)؛ یعنی در چهارضلعی ABCD اگر نقاط M، N، K و L وسط ضلع‌ها باشند، داریم: $P_{MNKL}=AC+DB$. در اینجا با توجه به اینکه شکل پدیدآمده یک لوزی است و در لوزی اندازهٔ همهٔ ضلع‌ها با هم برابر است، پس مجموع اندازهٔ هر دو ضلع روبه‌روی لوزی باید برابر با اندازهٔ یک قطر چهارضلعی باشد که نتیجه می‌دهد: قطرهای چهارضلعی موردنظر هم‌اندازه‌اند.

توجه: سایر گزینه‌ها نیز می‌توانند تحت شرایطی، درست باشند، اما چون در متن سؤال واژهٔ «همواره» قید شده است، پس لزوماً باید قطرهای چهارضلعی هم‌اندازه باشند و گزینه‌های دیگر، الزامی و همیشگی نیستند.

۱۶. گزینه ۳ درست است.



اگر از N به M وصل کنیم، مساحت مثلث MNC، برابر با $\frac{۱}{۴}$ مساحت کل $\overset{\Delta}{ABC}$ خواهد بود و NE این مساحت را نصف کرده است (بنابر متن فعالیت صفحهٔ ۶۷ کتاب هندسهٔ ۱) یعنی اگر فرض کنیم $S=S_{\overset{\Delta}{ABC}}$، آنگاه $S_{\overset{\Delta}{NEC}}=\frac{۱}{۸}S$ و چون $S_{\overset{\Delta}{BGC}}=\frac{S}{۳}$، پس

$S_{\overset{\Delta}{BGM}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{S}{۳}=\frac{S}{۶}$، درنتیجه:

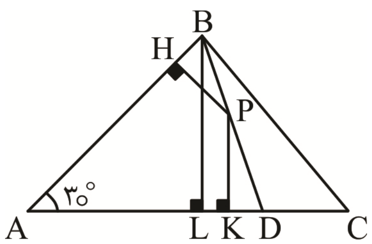
$$\frac{S}{۶}-\frac{S}{۸}=۴\Rightarrow\frac{\overbrace{۴S-۳S}^{=S}}{۲۴}=۴\Rightarrow S=۹۶$$

بنابراین، درست مانند مساحت مثلث BGC، مساحت مثلث AGB نیز، $\frac{۱}{۳}$ مساحت کل است:

$$S_{\overset{\Delta}{AGB}}=\frac{۱}{۳}\times ۹۶=۳۲$$

۱۷. گزینه ۳ درست است.

می‌دانیم مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین از ساق‌ها، برابر اندازهٔ ارتفاع وارد بر ساق است. مثلث ABD متساوی‌الساقین است؛ اگر ارتفاع BL را رسم کنیم، آنگاه:



$$PH+PK=BL\Rightarrow BL=۵+۷=۱۲$$

از طرفی در مثلث ABL داریم:

$$\Delta ABL:\hat{A}=۳۰^\circ\Rightarrow BL=\frac{AB}{۲}\Rightarrow AB=۲\times۱۲=۲۴$$

$$\Rightarrow AD=AB=۲۴$$

با توجه به فرض $AD=۲CD$ است؛ پس:

$$CD=BL=\frac{AD}{۲}=۱۲\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BCD}}=\frac{۱}{۲}BL.CD=\frac{۱}{۲}\times۱۲\times۱۲=۷۲$$

۱۸. گزینه ۲ درست است.

با توجه به فرض، $b=i$ است. طبق فرمول پیک داریم:

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{i}{۲}+i-۱=\frac{۳}{۲}i-۱\Rightarrow S+۱=\frac{۳}{۲}i\Rightarrow ۲(S+۱)=۳i$$

پس $۲(S+۱)$ بر ۳ بخش‌پذیر است. از آنجا که $۲۰+۱=۲۱$ بر ۳ بخش‌پذیر است، S می‌تواند ۲۰ باشد (که به‌ازای $i=b=۱۴$ به‌دست می‌آید) و گزینه‌های دیگر این ویژگی را ندارند.

۱۹. گزینه ۴ درست است.

با توجه به درایهٔ عمومی $a_{ij}=\begin{cases}-۱ & i\geq j\\ j-i & i<j\end{cases}$، داریم: $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}$. اکنون $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۴=A^۲\times A^۲=\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴ & ۰\\ ۰ & -۴\end{bmatrix}=-۴I$$

$$A^{۱۰۰}=(A^۴)^{۲۵}=(-۴I)^{۲۵}=(-۲^۲I)^{۲۵}=-۲^{۵۰}I$$

و بدیهی است که مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۰۰}=\begin{bmatrix}-۲^{۵۰} & ۰\\ ۰ & -۲^{۵۰}\end{bmatrix}$ برابر است با: $۲\times(-۲^{۵۰})=-۲^{۵۱}$

۲۰. گزینه ۱ درست است.

$$A=\begin{bmatrix}۲&۳&۱\\۵&-۳&۴\\۰&۱&-۱\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}۲&۳&۱\\۵&-۳&۴\\۰+۲&۱+۲&-۱+۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۳&۱\\۵&-۳&۴\\۲&۳&۱\end{bmatrix}$$

ماتریس B دارای دو سطر برابر است (سطرهای یکم و سوم) و بنابر تمرین ۴ از صفحهٔ ۳۰ کتاب هندسهٔ ۳ داریم: $|B|=۰$ و درنتیجه $|B^۲|=|B|^۲=۰$؛ پس باید تنها دترمینان A را به‌دست آوریم. با بسط نسبت به سطر سوم A خواهیم داشت:

$$|A|=-۱\times\begin{vmatrix}۲&۱\\۵&۴\end{vmatrix}-۱\times\begin{vmatrix}۲&۳\\۵&-۳\end{vmatrix}=-(۲\times۴-۱\times۵)-(۲\times-۳-۵\times۳)=-۳-(-۲۱)=۱۸$$

۲۱. گزینه ۳ درست است.

$$A=\begin{bmatrix}۱&x&-۲\\۲&-۱&۳\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}۳&۴\\۲x&۱\\۱&-۱\end{bmatrix}\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}۱+۲x^۲&۶+x\\۹-۲x&۴\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow|AB|=۴(۱+۲x^۲)-\big((۹-۲x)(۶+x)\big)=۴+۸x^۲-(۵۴-۳x-۲x^۲)=۱۰x^۲+۳x-۵۰$$

می‌دانیم حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ که در آن $a\neq۰$، برابر با $\frac{c}{a}$ است؛ پس در اینجا خواهیم داشت:

$$|AB|=۰\Rightarrow ۱۰x^۲+۳x-۵۰=۰\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=\frac{-۵۰}{۱۰}=-۵$$

۲۲. گزینه ۲ درست است.

فرض می‌کنیم $A-B=C=\begin{bmatrix}۶&۱&-۳\\۴&۳&۲\\-۲&۱&۲\end{bmatrix}$؛ در این‌صورت با ضرب $B^{-۱}$ از سمت چپ در این برابری و سپس ضرب $A^{-۱}$ از سمت راست در عبارت به‌دست آمده، خواهیم داشت:

$$B^{-۱}(A-B)A^{-۱}=B^{-۱}CA^{-۱}\Rightarrow B^{-۱}AA^{-۱}-B^{-۱}BA^{-۱}=B^{-۱}CA^{-۱}$$

$$\xrightarrow{B^{-۱}B=I=AA^{-۱}}B^{-۱}-A^{-۱}=B^{-۱}CA^{-۱}\Rightarrow|B^{-۱}-A^{-۱}|=|B^{-۱}||C||A^{-۱}|$$

$$\Rightarrow|B^{-۱}-A^{-۱}|=\frac{|C|}{|B||A|}\qquad \left(\text{بنابر تمرین ۷ صفحهٔ ۳۱ هندسهٔ ۳: } |A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}\right)$$

حال با بسط نسبت به سطر سوم ماتریس C و به کمک $|AB|=|A||B|$ می‌توانیم بنویسیم:

$$|C|=-۲\begin{vmatrix}۱&-۳\\۳&۲\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}۶&-۳\\۴&۲\end{vmatrix}+۲\begin{vmatrix}۶&۱\\۴&۳\end{vmatrix}=-۲(۲+۹)-(۱۲+۱۲)+۲(۱۸-۴)=-۱۸$$

$$\Rightarrow|B^{-۱}-A^{-۱}|=\frac{|C|}{|BA|}=\frac{-۱۸}{-۶}=۳$$

۲۳. گزینه ۱ درست است.

می‌توان از طریق برهان خلف ثابت کرد که مجموع و تفاضل یک تابع پیوسته و یک تابع ناپیوسته در نقطه‌ای مانند $x=a$، ناپیوسته است. از طرفی f و g در $x=a$ ناپیوسته و $f+g$ پیوسته است؛ بنابراین:

$۲f+۲g=۲(f+g)=۲\times$ تابع پیوسته $=$ تابع پیوسته

$۲f+۳g=۲(f+g)+g=$ تابع پیوسته $+$ تابع ناپیوسته $=$ تابع ناپیوسته

$۲f-۳g=۲f+۲g-۵g=۲(f+g)-۵g=$ تابع پیوسته $-$ تابع ناپیوسته $=$ تابع ناپیوسته

پس بین ۳ تابع داده‌شده، تنها یک تابع پیوسته است.

۲۴. گزینه ۳ درست است.

گزاره‌های «الف» و «ب» نادرست هستند؛ زیرا کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، عددی طبیعی است؛ بنابراین با توجه به اینکه $b \in \mathbb{Z}$ و a فرض شده‌اند، اگر $a \mid b$ آنگاه $[a,b] = |b|$.

همچنین باید در گزارهٔ «ب» شرط $b \neq ۰$ بیان می‌شد؛ زیرا می‌دانیم $۳ \mid ۰$، ولی $۰ \nmid ۳$.

گزاره‌های «ج» و «د» درست هستند که به‌صورت زیر ثابت می‌شوند:

$$a \mid b \Rightarrow b = aq \overset{\times m}{\Rightarrow} bm = amq \Rightarrow ma \mid mb$$

$$\text{فرض می‌کنیم } (a,p) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid p \xrightarrow{\text{اول } P} d = ۱ \quad \text{یا} \quad d = p \\ d \mid a \quad (۱) \end{cases}$$

$$\text{اگر } d = p \xrightarrow{(۱)} p \mid a \text{ (و این با فرض } p \nmid a \text{ تناقض دارد)} \Rightarrow d = ۱ \Rightarrow (a,p) = ۱$$

۲۵. گزینه ۲ درست است.

می‌دانیم که اگر $x \mid y$، آنگاه برای هر $m \in \mathbb{Z}$ نتیجه می‌شود $x \mid my$؛ پس داریم:

$$\begin{cases} ۱۱ \mid ۳a - ۳b + ۱ \overset{\times ۴}{\Rightarrow} ۱۱ \mid ۱۲a - ۱۲b + ۴ \\ ۱۱ \mid ۴a + ۷b + k \overset{\times ۳}{\Rightarrow} ۱۱ \mid ۱۲a + ۲۱b + ۳k \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل سمت راست}} ۱۱ \mid ۳۳b + ۳k - ۴ \xrightarrow{۱۱ \mid ۳۳b} ۱۱ \mid ۳k - ۴$$

$$\Rightarrow k \text{ کوچک‌ترین مقدار طبیعی} = ۵ \quad (۱۱ \mid ۳ \times ۵ - ۴ = ۱۱ \text{ زیرا})$$

۲۶. گزینه ۲ درست است.

اگر اعداد مطلوب را b بنامیم، آنگاه بنابر قضیهٔ تقسیم و طبق فرض خواهیم داشت:

$$۱۰۰ = b \times ۶ + r \,,\, ۰ \leq r < b$$

بنابراین:

$$۱۰۰ = ۶b + r \Rightarrow r = ۱۰۰ - ۶b$$

$$\xrightarrow{\text{شرط باقی‌مانده}} \begin{cases} ۰ \leq r \Rightarrow ۰ \leq ۱۰۰ - ۶b \Rightarrow ۶b \leq ۱۰۰ \Rightarrow b \leq ۱۶ \\ r < b \Rightarrow ۱۰۰ - ۶b < b \Rightarrow ۱۰۰ < ۷b \Rightarrow ۱۵ \leq b \end{cases}$$

درنتیجه: $۱۵ \leq b \leq ۱۶ \Rightarrow b = ۱۵, ۱۶$

۲۷. گزینه ۴ درست است.

<u>نکته:</u> عدد طبیعی p را اول می‌گوییم؛ هرگاه غیر از یک و خودش هیچ مقسوم‌علیه دیگری نداشته باشد.

$$p + ۲۷ = n \Rightarrow p = n^۳ - ۲۷ \Rightarrow p = n^۳ - ۳^۳ \Rightarrow p = (n - ۳)(n^۲ + ۳n + ۹)$$

از آنجا که p عددی اول است، دو حالت داریم:

$$\text{(الف} \begin{cases} n - ۳ = p \\ n^۲ + ۳n + ۹ = ۱ \Rightarrow n^۲ + ۳n + ۸ = ۰ \xrightarrow{\Delta < ۰} \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{(ب} \begin{cases} n - ۳ = ۱ \Rightarrow n = ۴ \\ n^۲ + ۳n + ۹ = p \Rightarrow p = ۴^۲ + ۳(۴) + ۹ = ۳۷ \end{cases}$$

درنتیجه: $p - n = ۳۷ - ۴ = ۳۳$.

۲۸. گزینه ۳ درست است.

در تقسیم عدد a بر ۶ طبق قضیهٔ تقسیم، عدد a به یکی از صورت‌های $۶k$، $۶k + ۱$، $۶k + ۲$، $۶k + ۳$، $۶k + ۴$ و

$6k+5$ است، ولی طبق فرض، a زوج است و مضرب ۶ نیز نیست؛ درنتیجه $a=6k+2$ یا $a=6k+4$ و لذا:

$$a^2-7=(6k+2)^2-7=36k^2+24k+4-7$$

$$\Rightarrow a^2-7=12(3k^2+2k)-3 \Rightarrow a^2-7=12(3k^2+2k)-12+9$$

$$\Rightarrow a^2-7=12\underbrace{(3k^2+2k-1)}_{=t}+9$$

و به‌ازای $a=6k+4$ نیز، با محاسبه‌ای مشابه، همین نتیجه به‌دست می‌آید.

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2-7 بر ۱۲ برابر ۹ است.

توجه: به‌راحتی می‌توان با یک مثال مناسب، مانند $a=4$ نیز به گزینهٔ درست رسید!

$$a=4 \Rightarrow a^2-7=16-7=9$$

۲۹. گزینه ۱ درست است.

a یک عدد فرد و درنتیجه $a+2$ نیز عددی فرد است و چون $b\,|\,a+2$، پس b هم یک فرد است. می‌دانیم که مربع هر عدد فرد به‌صورت $8k+1$ است (صفحهٔ ۱۵ و ۱۶ کتاب ریاضیات گسسته) که در آن $k\in\mathbb{Z}$ و از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$a^2+b^2-4=(8k+1)+(8k'+1)-4=8\underbrace{(k+k')}_{=q}-2=8q-2=8q-8+8-2=8(q-1)+6$$

پس باقی‌مانده برابر ۶ است.

۳۰. گزینه ۲ درست است.

روش اول:

$$(135,315)=(45\times 3,45\times 7)=45\underbrace{(3,7)}_{=1}=45$$

$$\Rightarrow [(135,315),84]=[45,84]=[3\times 15,3\times 28]=3[15,28]$$

و چون $(15,28)=1$، پس $[15,28]=15\times 28$ است و درنتیجه داریم:

$$[(135,315),84]=3\times 15\times 28=4\times 9\times 5\times 7=2^2\times 3^2\times 5\times 7$$

$$\Rightarrow a+b+c+d=2+2+1+1=6$$

روش دوم (نکته): اگر تجزیهٔ دو عدد طبیعی a و b به عامل‌های اول، به‌صورت $a=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}$ و $b=p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times\ldots\times p_n^{\beta_n}$ باشد (p_1، p_2، ... و p_n اعداد اول و همگی متمایزند و α_iها و β_iها اعداد حسابی‌اند)، آنگاه داریم:

$$(a,b)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}\times p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}\times\ldots\times p_n^{\min(\alpha_n,\beta_n)}$$

$$[a,b]=p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}\times p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)}\times\ldots\times p_n^{\max(\alpha_n,\beta_n)}$$

در اینجا با توجه به اینکه $84=2^2\times 3\times 7$، $135=3^3\times 5$ و $315=3^2\times 5\times 7$، پس می‌توان نوشت:

$$[(135,315),84]=\left[\underbrace{(3^3\times 5,3^2\times 5\times 7)}_{},2^2\times 3\times 7\right]=\left[\underbrace{3^2\times 5}_{},2^2\times 3\times 7\right]=2^2\times 3^2\times 5\times 7$$

$$\Rightarrow a+b+c+d=6$$

فیزیک

۳۱. گزینه ۱ درست است.

ابتدا فاصله قائم دو نقطه B و C را می‌یابیم:

$$\sin 30^\circ = \frac{h_{BC}}{60} \Rightarrow h_{BC} = 60 \sin 30^\circ = 60 \times \frac{1}{2} = 30\,cm$$

فشار جیوه برحسب $cmHg$ برابر است با:

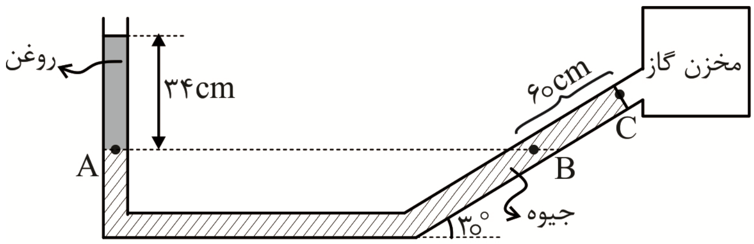
$$P_{\text{جیوه}} = 30\,cmHg$$

حال فشار حاصل از روغن را برحسب $cmHg$ به‌دست می‌آوریم:

$$(\rho h)_{\text{روغن}} = (\rho' h')_{\text{جیوه}} \Rightarrow 0/8 \times 34 = 13/6 \times h' \Rightarrow h' = 2\,cmHg$$

پس فشار حاصل از روغن $2cmHg$ است.

طبق نقاط هم‌تراز (اصل هم‌فشاری مایعات) داریم:



$$P_A = P_B \Rightarrow 2cmHg + P_0 = 30 + Pg \Rightarrow Pg - P_0 = -28\,cmHg$$

پس فشار پیمانه گاز $-28cmHg$ است.

۳۲. گزینه ۱ درست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست است؛ زیرا هر جسمی که درون شاره‌ای قرار گیرد، به‌دلیل اختلاف فشار بالا و پایین جسم از طرف شاره، نیروی شناوری بر جسم به‌طرف بالا وارد می‌شود.

ب) نادرست است؛ زیرا برای جسمی که توخالی باشد و چگالی‌اش بیشتر از چگالی شاره باشد، می‌تواند جسم در شاره غوطه‌ور یا شناور باشد.

ج) درست است.

د) نادرست است؛ زیرا بر گلوله‌ای که ته ظرف است، علاوه‌بر نیروی شناوری، نیروی عمودی سطح بر گلوله نیز وارد می‌شود و چون گلوله در حال تعادل دینامیکی است، نیروی وزن برابر مجموع نیروی عمودی سطح و نیروی شناوری است.

۳۳. گزینه ۱ درست است.

گام ۱: ابتدا حجم اتاق را محاسبه می‌کنیم:

$$V = 3 \times 5 \times 8 = 120\,m^3$$

گام ۲: بر اساس معادله پیوستگی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} A_1 v_1 = A_2 v_2 \\ v_2 = \dfrac{l_2}{t} \end{cases} \Rightarrow A_1 v_1 = \frac{\overbrace{A_2 l_2}^{\text{v حجم}}}{t} \Rightarrow A_1 \times 2 = \frac{120}{20 \times 60} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{20} m^2 = 500\,cm^2$$

۳۴. گزینه ۴ درست است.

طبق فرض، ابتدا $\begin{cases} m_1 = 5000\,kg \\ v_1 = 15\dfrac{m}{s} \end{cases}$ و سپس $\begin{cases} m_2 = 4500\,kg \\ v_2 = 20\dfrac{m}{s} \end{cases}$ است. اینک از روش نسبت بهره می‌گیریم:

$$K=\frac{۱}{۲}mv^{۲} \quad \Rightarrow K_{۲}=\frac{۱۶}{۱۰}K_{۱}\xrightarrow[\times ۱۰۰]{\text{تبدیل به}}K_{۲}=\%۱۶۰K_{۱}$$

$\frac{۱۶}{۱۰}$ برابر $\frac{۹}{۱۰}$ برابر $(\frac{۴}{۳})^{۲}$

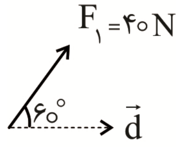
که به معنای $\%۶۰$ افزایش انرژی جنبشی است.

توجه کنید که اعداد ثابت (در اینجا ضریب $\frac{۱}{۲}$) در روش نسبت، تأثیر ندارند.

۳۵. گزینه ۳ درست است.

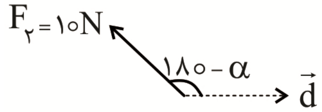
گام اول: کار نیروی $\vec{F}_{۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$W_{۱}=F_{۱}d\cos\alpha=۴۰\times d\times \underbrace{\cos ۶۰}_{\frac{۱}{۲}}$$
$$\Rightarrow W۱=۲۰d$$



گام دوم: کار نیروی $\vec{F}_{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$W_{۲}=F_{۲}d\cos(۱۸۰-\alpha)\Rightarrow W_{۲}=-۱۰d\cos\alpha$$



گام سوم: طبق صورت سؤال می‌دانیم نسبت کار نیروی $\vec{F}_{۲}$ به کار نیروی $\vec{F}_{۱}$ برابر $-\frac{۳}{۱۰}$ است؛ پس:

$$\frac{W_{۲}}{W_{۱}}=-\frac{۳}{۱۰}\Rightarrow\frac{-۱۰d\cos\alpha}{۲۰d}=-\frac{۳}{۱۰}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۳}{۵}=۰/۶\Rightarrow\alpha=۵۳^{\circ}$$

۳۶. گزینه ۳ درست است.

از لحظه‌ای که شخص گلوله را از روی زمین برمی‌دارد تا لحظه‌ای که پرتاب می‌کند، نیروی شخص و نیروی وزن، بر گلوله کار انجام می‌دهند. از قضیه کار و انرژی جنبشی $W_{T}=\frac{۱}{۲}mv_{۲}^{۲}-\frac{۱}{۲}mv_{۱}^{۲}$ استفاده می‌کنیم تا کار شخص را حساب کنیم.

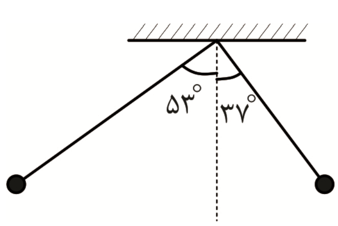
توجه کنید که کار نیروی وزن بر جسمی که در راستای قائم به اندازه Δh جابه‌جا می‌شود، از رابطهٔ $Wg=-mg\Delta h$ حساب می‌شود.

$$W_{\text{شخص}}+W_{\text{وزن}}=\frac{۱}{۲}mv_{۲}^{۲}-\frac{۱}{۲}mv_{۱}^{۲}$$

$$W_{\text{شخص}}+(-۲\times ۱۰\times ۱/۵)=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۵^{۲}-۰\Rightarrow W_{\text{شخص}}=۵۵J$$

۳۷. گزینه ۲ درست است.

برای محاسبهٔ تغییر ارتفاع در مسیرهای دایره‌ای توجه کنید که فاصله عمودی گلوله تا راستای آویز در هر وضعیت، برابر $L.\cos\alpha$ آن است که در این رابطه، α زاویه با راستای قائم است؛ پس می‌توان گفت:



$$|\Delta h|=L(\cos\alpha_{\text{کوچک‌تر}}-\cos\alpha_{\text{بزرگ‌تر}})$$
$$|\Delta h|=L(\cos ۳۷^{\circ}-\cos ۵۳^{\circ})$$
$$|\Delta h|=۲(۰/۸-۰/۶)$$
$$|\Delta h|=۰/۴m$$

جسم در مجموع بالا رفته است و کار نیروی وزن روی گلوله، منفی است:

$$W_{mg}=-mg\Delta h$$
$$W_{mg}=-۰/۵\times ۱۰\times ۰/۴=-۲J$$

۳۸. گزینه ۲ درست است.

گام ۱: اندازهٔ $U_{e\max}$ را در حالت حداقل طول فنر برحسب انرژی جنبشی جسم تعیین می‌کنیم:

$$U_{e\max}=\frac{۱}{۱۰}K_۱=\frac{۱}{۱۰}\left(\frac{۱}{۲}m(۳)^۲\right)\Rightarrow U_{e\max}=\frac{۹}{۲۰}m$$

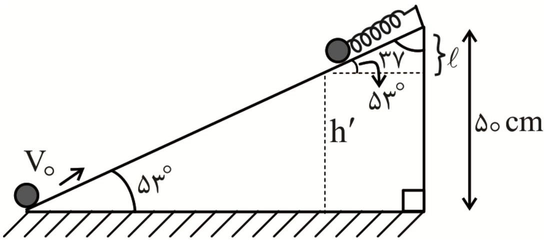
گام ۲: بر اساس اصل پایستگی انرژی مکانیکی، ارتفاع جسم از سطح زمین در لحظه بیشترین فشردگی فنر (h') را به‌دست می‌آوریم:

$$E_۱-E_۲=W_f$$

$$\frac{۱}{۲}mv_\circ^۲-U_{e_{\max}}-mgh'=\frac{۲۰}{۱۰۰}(\frac{۱}{۲}mv_\circ^۲)$$

$$\frac{۱}{۲}\cancel{m}(۹)-\frac{۹}{۲۰}\cancel{m}-۱۰\cancel{m}h'=\frac{۹}{۱۰}\cancel{m}\Rightarrow h'=\frac{۶۳}{۲۰۰}m=۳۱/۵cm$$

گام ۳: با توجه به شکل، طول فنر (حداکثر فشردگی فنر) x، برابر است با:



$$l=h-h'=۵۰-۳۱/۵=۱۸/۵cm$$

$$\sin ۵۳^\circ=\cos ۳۷^\circ=\frac{l}{x}$$

$$۰/۸=\frac{۱۸/۵}{x}\Rightarrow x=۲۳/۱cm$$ طول فنر

۳۹. گزینه ۲ درست است.

طبق قانون پایستگی انرژی داریم: (نقطه ۲ (سطح مقطع $A_۲$) را مبدأ پتانسیل در نظر می‌گیریم.)

$$E_۱=E_۲\Rightarrow U_۱+K_۱=\cancel{U_۲}^{\,\circ}+K_۲\Rightarrow mgh_۱+\frac{۱}{۲}mv_۱^۲=\frac{۱}{۲}mv_۲^۲$$

$$\xrightarrow[\text{بر } m]{\text{طرفین تقسیم}}gh_۱+\frac{۱}{۲}v_۱^۲=\frac{۱}{۲}v_۲^۲$$

$$\Rightarrow ۱۰\times ۴/۸+\frac{۱}{۲}\times ۲^۲=\frac{۱}{۲}v_۲^۲\Rightarrow v_۲^۲=۱۰۰\Rightarrow v_۲=۱۰\frac{m}{s}$$

طبق معادله پیوستگی داریم:

$$A_۱v_۱=A_۲v_۲\Rightarrow A_۱\times ۲=A_۲\times ۱۰\Rightarrow \frac{A_۲}{A_۱}=\frac{۱}{۵}$$

۴۰. گزینه ۴ درست است.

پس از پرتاب، نیروی اصطکاک بر جسم کار انجام می‌دهد و کار نیروی اصطکاک سبب افزایش انرژی درونی جسم و محیط آن می‌شود؛ پس از قضیه کار و انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم و جابه‌جایی جسم را حساب می‌کنیم:

$$W_T=\Delta K\xrightarrow[W_T=W_f]{K_۲=۰}W_f=-\frac{۱}{۲}mv_۱^۲\rightarrow W_f=-\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱۰^۲\Rightarrow W_f=-۲۰۰J$$

برای محاسبه جابه‌جایی می‌توان نوشت:

$$d=\frac{۲۰۰}{۲۵}=۸m$$

۴۱. گزینه ۴ درست است.

لازم است بدانید که اندازهٔ نیروی مقاومت هوا به تندی حرکت جسم نیز وابسته بوده و به همین علت اندازهٔ آن در مسیر رفت و برگشت متفاوت است. ابتدا با بررسی کل رفت و برگشت گلوله، کار نیروی مقاومت هوا در کل مسیر را محاسبه کرده و سپس طبق فرض، $\frac{۲}{۳}$ آن را به مسیر رفت اختصاص می‌دهیم:

$$E_۱-|W_f|=E_۲\Rightarrow K_۱-|W_f|=K_۲$$

$$\frac{۱}{۲}\times ۲\times(۱۰)^{۲}-|W_f|=\frac{۱}{۲}\times ۲\times(۴)^{۲}$$

$$|W_f|_{\text{کل}}=۸۴J \Rightarrow |W_f|_{\text{در مسیر رفت}}=\frac{۲}{۳}\times ۸۴=۵۶J$$

اینک قانون پایستگی انرژی را در مسیر رفت بررسی می‌کنیم:

$$E_۱-|W_f|=E_۲ \Rightarrow K_۱-|W_f|=Ug_۲$$

$$\frac{۱}{۲}\times ۲\times(۱۰)^{۲}-۵۶=۲\times ۱۰\times h_۲ \Rightarrow h_۲=۲/۲m$$

۴۲. گزینه ۳ درست است.

می‌توان انرژی تولیدی گرمایی را در نظر گرفت و بازده هریک از سیستم‌های انتقال یا دستگاه‌های مصرف‌کننده را در انرژی خروجی ضرب کرد.

$$\underbrace{۴۰\times ۱۰^{۶}\times V}_{\text{گرمای حاصل از سوخت}} \times \underbrace{\frac{۴۵}{۱۰۰}}_{\text{بازده نیروگاه}} \times \underbrace{\frac{۹۰}{۱۰۰}}_{\text{بازده انتقال}} \times \underbrace{\frac{۲۰}{۱۰۰}}_{\text{بازده مصرف‌کننده‌ها}} = \underbrace{۱۰\times ۱۰^{۵}\times ۹\times ۳۶۰}_{\text{مصرف کل سوخت برحسب ژول}}$$

$$V=۱۰^{۴}\,L$$

۴۳. گزینه ۴ درست است.

گام ۱: با استفاده از رابطه $t=\frac{-b}{۲a}$، لحظه اکسترمم تابع را به‌دست می‌آوریم:

لحظه تغییر جهت متحرک $\quad t=-\frac{b}{۲a} \Rightarrow t=-\frac{۴}{-۲}=۲s$

گام ۲: با استفاده از t به‌دست آمده، جابه‌جایی متحرک و بردار سرعت متوسط آن را می‌توانیم تعیین کنیم:

$$t=۲s \Rightarrow x=-(۲)^{۲}+۴(۲)+۴=۸m$$

$$\Delta x=x-x_{۰} \Rightarrow \Delta x=۸-۴=۴m$$

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \overline{v}=۲\frac{m}{s}\ ,\ \vec{\overline{v}}=۲\vec{i}$$

۴۴. گزینه ۲ درست است.

عدم برابری مسافت طی‌شده و جابه‌جایی متحرک نشان می‌دهد این متحرک تغییر جهت داده است. برای تحقق فرض تست، دو حالت ممکن است که در یکی از آن‌ها، متحرک ابتدا در جهت مثبت و در دیگری، ابتدا در جهت منفی محور x حرکت می‌کند.

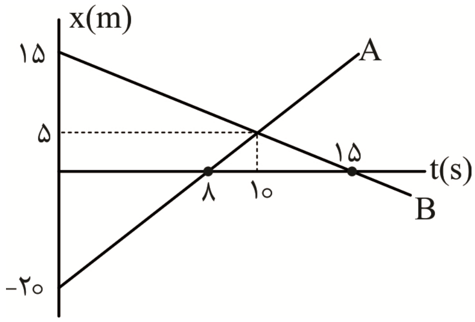
فرض : $L=۳\times\Delta x \Rightarrow y+x=۳(y-x) \Rightarrow ۲y=۴x \Rightarrow y=۲x$

در هر دو حالت $\left.\begin{matrix} y-x=۱۲m \\ y=۲x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=۱۲m \\ y=۲۴m \end{cases}$

در حالت اول، در مکان $-x$ یعنی $x=-۱۲m$ تغییر جهت داده و در حالت دوم، در مکان $+y$ یعنی $x=+۲۴m$ تغییر جهت داده است.

۴۵. گزینه ۱ درست است.

گام اول: سرعت A را حساب می‌کنیم:



$$v_A = \frac{۰-(-۲۰)}{۸} = ۲/۵\frac{m}{s}$$

گام دوم: معادله حرکت A را می‌نویسیم و مکان آن را در لحظهٔ $t = ۱۰s$ به‌دست می‌آوریم:

$$x_A = v_A t + x_{۰A} \Rightarrow x_A = ۲/۵t - ۲۰ \xrightarrow{t=۱۰s} x_A = ۵m$$

گام سوم: سرعت B را حساب می‌کنیم و معادله آن را می‌نویسیم:

$$v_B = \frac{۵-۱۵}{۱۰-۰} = -۱\frac{m}{s} \ , \ x_B = -t + ۱۵$$

گام چهارم: لحظه‌ای که مکان B به صفر می‌رسد را حساب می‌کنیم:

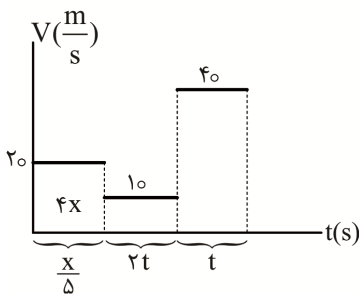
$$x_B = ۰ \Rightarrow t = ۱۵s$$

گام پنجم: بین دو لحظه $t_۱ = ۸s$ تا $t_۲ = ۱۵s$ بردار مکان هر دو متحرک، مثبت و هم‌جهت‌اند؛ پس مدت‌زمان موردنظر برابر $\Delta t = ۱۵ - ۸ = ۷s$ است.

۴۶. گزینه ۳ درست است.

به‌منظور سادگی در محاسبات، کل فاصله را $۱۰x$ فرض می‌کنیم. و بدین ترتیب ۴۰% کل فاصله برابر $۴x$ و ادامه مسیر برابر $۶x$ خواهد بود.

برای حل تست از نمودار سرعت - زمان بهره می‌گیریم که در آن سطح زیر نمودار بیانگر جابه‌جایی است:



$$۱۰\times ۲t + ۴۰\times t = ۶x \Rightarrow t = \frac{x}{۱۰}$$

به این ترتیب زمان‌ها در نمودار برحسب x قابل بیان هستند:

$$t_{\text{کل}} = \frac{x}{۵} + ۲(\frac{x}{۱۰}) + \frac{x}{۱۰} = \frac{۵x}{۱۰} = \frac{x}{۲}$$

$$V_{av} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t} = \frac{۱۰x}{(\frac{x}{۲})} = ۲۰\frac{m}{s}$$

۴۷. گزینه ۴ درست است.

معادله مکان - زمان متحرک به‌صورت زیر است:

$$x = vt$$

اگر متحرک مسیر ۳۶۰ متری را در مدت t بپیماید، پس:

$$۳۶۰ = vt \qquad (I)$$

اگر متحرک $۶\frac{m}{s}$ به سرعت خود بیفزاید، $۳s$ زودتر به پایان مسیر می‌رسد، پس:

$$۳۶۰ = (v+۶)(t-۳) \qquad (II)$$

با توجه به معادله (I) و (II) داریم:

$$vt = (v+۶)(t-۳) \Rightarrow vt = vt - ۳v + ۶t - ۱۸ \Rightarrow ۳v = ۶t - ۱۸ \rightarrow v = ۲t - ۶ \qquad (*)$$

حال رابطه (*) را در رابطه (I) جایگذاری می‌کنیم:

$$(I): ۳۶۰ = vt \xrightarrow{(*)} ۳۶۰ = (۲t-۶)(t) \Rightarrow ۳۶۰ = ۲t^۲ - ۶t \Rightarrow ۲t^۲ - ۶t - ۳۶۰ = ۰$$

$$\Rightarrow t^۲ - ۳t - ۱۸۰ = ۰ \Rightarrow (t-۱۵)(t+۱۲) = ۰ \begin{cases} t = ۱۵s \\ t = -۱۲s \end{cases}$$

اینک سرعت متحرک (v) را محاسبه می‌کنیم:

$$۳۶۰ = vt \Rightarrow ۳۶۰ = ۱۵v \Rightarrow v = ۲۴\frac{m}{s}$$

با توجه به معادله مکان - زمان متحرک، مسافت متحرک را در مدت زمان $۵s$ به‌دست می‌آوریم:

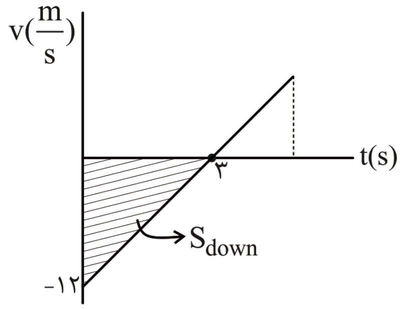
$$x = vt \Rightarrow x = ۲۴t \xrightarrow{t=۵s} x_{۵s} = ۱۲۰\,m$$

$$\frac{x(۵s)}{x_{\text{کل}}} = \frac{۱۲۰}{۳۶۰} = \frac{۱}{۳}$$

۴۸. گزینه ۲ درست است.

گام اول: متحرک با شتاب ثابت در حال حرکت است. معادله سرعت - زمان متحرک را نوشته، سپس نمودار سرعت - زمان آن را رسم می‌کنیم:

$$\begin{matrix} x = ۲t^۲ - ۱۲t + ۱۶ \\ x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t + x_۰ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}a = ۲ \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = -۱۲\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۴t - ۱۲$$



گام دوم: در مدت $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۳s$ حرکت متحرک، کندشونده است. می‌دانیم سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر است با جابه‌جایی متحرک؛ پس در بازه زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۳s$ داریم:

$$\Delta x = S_{up} - S_{domn} = ۰ - \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۱۲ = -۱۸m$$

گام سوم: در نهایت داریم:

$$|V_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{۱۸}{۳} = ۶\frac{m}{s}$$

۴۹. گزینه ۱ درست است.

گام اول: خط مماس بر نمودار متحرک B در لحظهٔ $۱۲s$ منطبق بر نمودار متحرک A است؛ پس سرعت متحرک B در لحظهٔ $t = ۱۲s$ برابر $۱۰\frac{m}{s}$ است.

$$v_B = a_B t + v_{۰B} \xrightarrow[v_B = ۱۰\frac{m}{s}]{t=۱۲s} ۱۰ = ۲ \times ۱۲ + v_{۰B} \Rightarrow v_{۰B} = -۱۴\frac{m}{s}$$

گام دوم: معادله مکان - زمان دو متحرک A و B را می‌نویسیم. متحرک A با سرعت ثابت و متحرک B با شتاب ثابت در حرکت هستند؛ پس:

$$x_A = v_A t + x_{۰A} \Rightarrow x_A = ۱۰t + x_{۰A}$$

$$x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_{\circ B}t+x_{\circ B}\Rightarrow x_B=\frac{1}{2}\times 2\times t^2-14t+34\Rightarrow x_B=t^2-14t+34$$

گام سوم: در لحظهٔ $t=12s$ ، مکان دو متحرک با هم برابر است، پس:

$$x_A=10t+x_{\circ A}\xrightarrow{t=12s}x_A=120+x_{\circ A}$$

$$x_B=t^2-14t+34\xrightarrow{t=12s}x_B=(12)^2-14(12)+34=10\,m$$

$$\xrightarrow[x_A=x_B]{t=12s}120+x_{\circ A}=10\Rightarrow x_{\circ A}=-110\,m$$

گام چهارم: حال مکان متحرک A و B را در لحظهٔ $t=5s$ به‌دست می‌آوریم:

$$x_A=10t-110\xrightarrow{t=5s}x_A=10(5)-110=-60\,m$$

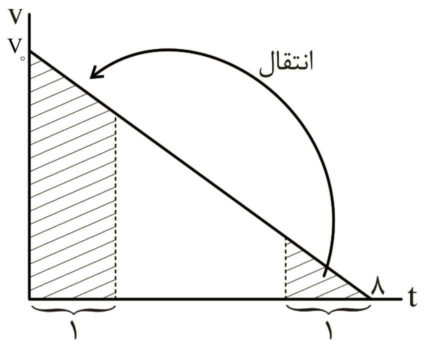
$$x_B=t^2-14t+34\xrightarrow{t=5s}x_B=(5)^2-14(5)+34=-11m$$

گام پنجم: فاصلهٔ دو متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$|x_A-x_B|=49m$$

۵۰. گزینه ۱ درست است.

برای حل تست از نمودار $v-t$ بهره می‌گیریم: مشاهده می‌کنید که با انتقال مثلث جابه‌جایی در ثانیه آخر به ذوزنقه جابه‌جایی ثانیه اول، یک مستطیل حاصل می‌شود:



$$v_\circ\times 1=10\Rightarrow v_\circ=10\frac{m}{s}$$

جابه‌جایی کل، همان سطح زیر کل نمودار است:

$$\Delta x=\frac{10\times 8}{2}=40\,m$$

۵۱. گزینه ۳ درست است.

گام ۱: سرعت متحرک را پس از طی مسافت $8m$ و $32m$ محاسبه می‌کنیم:

$$a=-4\frac{m}{s^2}$$

$$v_\circ=8\frac{m}{s}\qquad v=?\qquad a'=+4\frac{m}{s^2}$$

$$x_o\underbrace{------}_{\Delta x=8m}x_A\underbrace{------------}_{\Delta x=32}x_B$$

$$x_\circ=0\qquad x_1=8m\qquad x_2=40\,m$$

با استفاده از معادله مستقل از زمان (معادله سرعت – مکان) می‌توان سرعت v و v' تعیین کرد:

$$v^2-v_\circ^2=2a\Delta x\Rightarrow v=\sqrt{2a\Delta x+v_\circ^2}$$

$$v=\sqrt{2(-4)\times 8+64}=0$$

$$v'^2-v^2=2a'\Delta x'\Rightarrow v'=\sqrt{2a'\Delta x+v^2}$$

$$v'=\sqrt{2(4)\times 32+0}\Rightarrow v'=16\frac{m}{s}$$

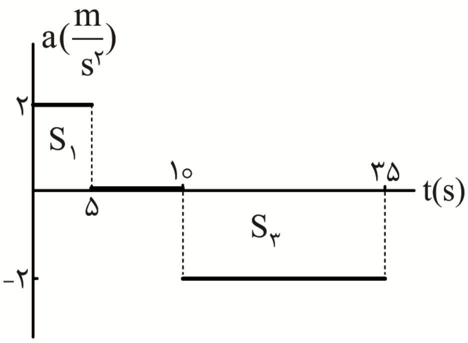
گام ۲: حرکت متحرک از مکان ۸ متری مبدأ تا ۴۰ متری مبدأ تندشونده بوده است.

با توجه به ثابت بودن شتاب، می‌توان از رابطهٔ $v_{av} = \frac{v + v_۰}{۲}$ برای محاسبه سرعت متوسط استفاده کرد:

$$v_{av} = \frac{۱۶ + ۰}{۲} = ۸\frac{m}{s^۲}$$

۵۲. گزینه ۴ درست است.

گام ۱: مساحت زیر نمودار $(a - t)$ برابر تغییرات سرعت (Δv) است. بنابراین می‌توانیم سرعت متحرک را در لحظه‌های $t = ۵s$ و $t = ۳۵s$ به‌دست می‌آوریم:



$$S_۱ = ۵ \times ۲ = ۱۰\frac{m}{s} \qquad \Delta v_۱ = S_۱ = ۱۰\frac{m}{s}$$

$$v_{۵S} = \Delta v_۱ + v_۰ \Rightarrow v_{۵S} = ۱۰\frac{m}{s}$$

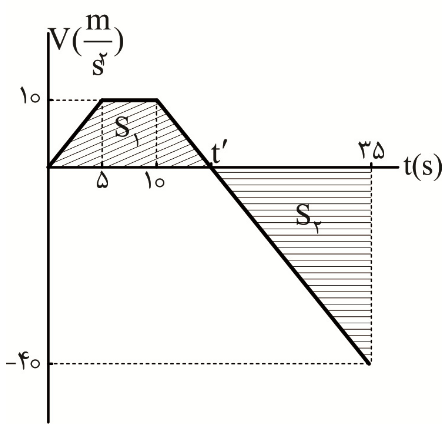
$$S_۳ = (۳۵ - ۱۰) \times (-۲) = -۵۰\frac{m}{s}$$

$$\Delta v_۳ = S_۳ = -۵۰\frac{m}{s}$$

$$v_{۳۵s} = \Delta v_۳ + v_{۵s} = -۵۰ + ۱۰ = -۴۰\frac{m}{s}$$

گام ۲: نمودار $(v - t)$ را رسم می‌کنیم. مساحت زیر این نمودار برابر جابه‌جایی است. جابه‌جایی و مسافت طی‌شده را در مدت $۳۵s$ اول به‌دست می‌آوریم و سپس نسبت آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

ابتدا اندازه t' را با استفاده از تشابه مثلث‌ها تعیین می‌کنیم:



$$\frac{۳۵ - t'}{t' - ۱۰} = \frac{۴۰}{۱۰} \Rightarrow t' = ۱۵s$$

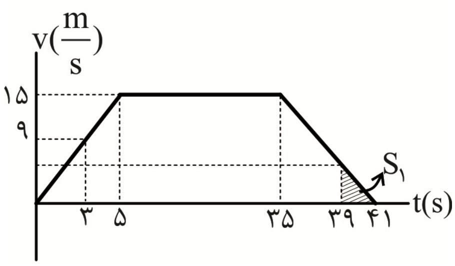
$$S_۱ = \frac{(۱۵ + ۵) \times ۱۰}{۲} = ۱۰۰m$$

$$S_۲ = \frac{(۳۵ - ۱۵) \times (-۴۰)}{۲} = -۴۰۰m$$

$$\frac{l}{\Delta x} = \frac{۱۰۰ + |-۴۰۰|}{۱۰۰ + (-۴۰۰)} = \frac{۵}{۳}$$

۵۳. گزینه ۳ درست است.

گام اول: با استفاده از معادلهٔ سرعت - زمان و مستقل از شتاب در مرحله اول و مرحله آخر حرکت، نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:



$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۱۵ = a \times ۵ \Rightarrow a = ۳\frac{m}{s^۲}$$

در قسمت سوم حرکت داریم:

$$\Delta x = \frac{v + v_۰}{۲}\Delta t \Rightarrow ۴۵ = \frac{۱۵ + ۰}{۲} \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = ۶s$$

پس لحظه توقف متحرک برابر $۳۵ + ۶ = ۴۱s$ است.

گام دوم: اکنون سرعت متحرک را در لحظه $t = ۳s$ و $t = ۳۹s$ حساب می‌کنیم:

$$v = ۳t + ۰ \xrightarrow{t=۳s} v_{۳s} = ۹\frac{m}{s}$$

گام سوم: می‌توانیم از تشابه دو مثلث $S_۱$ و مثلث بزرگ آن استفاده کرد و سرعت در لحظهٔ $t = ۳۹$ را حساب کرد.

$$\frac{۱۵}{۴۱-۳۵} = \frac{v}{۴۱-۳۹} \Rightarrow v_{۳۹s} = ۵\frac{m}{s}$$

گام آخر: شتاب متوسط متحرک را حساب می‌کنیم:

$$av = \frac{v_{۳۹s} - v_{۳۲}}{۳۹-۳} = \frac{۵-۹}{۳۶} = \frac{-۴}{۳۶} = -\frac{۱}{۹}\frac{m}{s^۲}$$

۵۴. گزینه ۲ درست است.

از معادله جابه‌جایی در t ثانیه n اُم استفاده می‌کنیم و برای ۳ ثانیه اول و ۲ ثانیه n اُم آن را می‌نویسیم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}gt^۲(۲n-۱)$$

$$\Delta x_{\text{۳ ثانیه اول}} = \frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times ۳^۲ \times (۲\times۱-۱) = ۴۵m$$

$$\Delta x_{\text{۲ ثانیه nاُم}} = \frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times ۲^۲ \times (۲n-۱) = ۲۰(۲n-۱)m$$

اکنون اختلاف جابه‌جایی‌های آن‌ها را در نظر می‌گیریم و n را حساب می‌کنیم:

$$۲۰(۲n-۱) - ۴۵ = ۹۵m$$

پس مدت‌زمان سقوط برابر $۴\times۲ = ۸s$ است و سرعت متحرک در لحظه برخورد $(n = ۴)$ به زمین برابر است با:

$$v = gt = ۱۰\times۸ = ۸۰\frac{m}{s}$$

و با توجه به رابطه $v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}$ در حرکت با شتاب ثابت، می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{۰+۸۰}{۲} = ۴۰\frac{m}{s}$$

۵۵. گزینه ۲ درست است.

روش اول:

گام ۱: حداکثر فاصله وقتی است که گلوله A به سطح زمین رسیده باشد. با استفاده از رابطـه $y = -\frac{۱}{۲}gt^۲$، زمـان رسـیدن این گلوله به سطح زمین را به‌دست می‌آوریم:

$$y_A = -\frac{۱}{۲}gt_A^۲ \Rightarrow ۱۸۰ = -\frac{۱}{۲}(۱۰)t_A^۲ \Rightarrow t_A = ۶s$$

گام ۲: با توجه به حداکثر فاصله بین دو گلوله، زمان حرکت گلوله دوم (B) را محاسبه می‌کنیم:

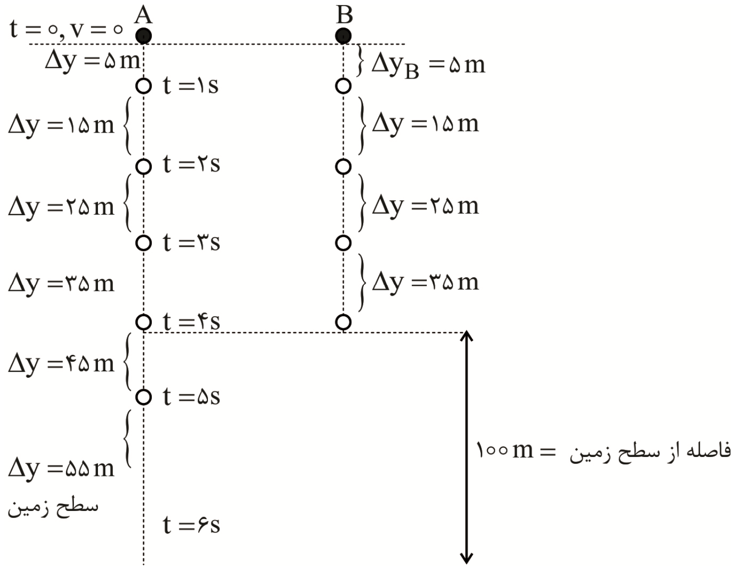
$$y_B = -\frac{۱}{۲}gt_B^۲ \Rightarrow -(۱۸۰-۱۰۰) = -\frac{۱}{۲}(۱۰)t_B^۲ \Rightarrow t_B = ۴s$$

گام ۳: اختلاف زمانی حرکت دو گلوله که در واقع تأخیر زمانی گلوله B برای رها کردن است را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta t = ۶ - ۴ = ۲s$$

روش دوم: در بازه‌های زمانی یکسان T، جابه‌جایی جسم یک دنباله حسابی تشـکیل مـی‌دهنـد کـه قدرنسـبت آن $d = gT^۲$ است. به‌ازای $T = ۱s$ دنباله حسابی سقوط آزاد به شکل زیر است و می‌توان تأخیر زمانی را به‌دست آورد.

زمانی که گلوله A به سطح زمین می‌رسد، گلوله B ۸۰ متر پایین آمده است که با توجه به شکل ۴ ثانیه طول کشیده است.



$$t_A = 6s$$
$$t_B = 4s$$
$$\Delta t = (t_A - t_B) = 2s$$

شیمی

۵۶. گزینه ۱ درست است.

عبارت اول: نادرست است؛ زیرا نمودار داده‌شده تغییرات دمای هواکره برحسب کلوین را نشان می‌دهد زیرا اگر برحسب سیلسیوس بود، در ناحیه‌هایی باید دمای منفی را نشان می‌داد.

عبارت دوم: نادرست است؛ زیرا بعد از ارتفاع D (لایه چهارم) آنیون وجود ندارد.

عبارت سوم: درست است؛ با افزایش ارتفاع در هواکره، فشار هواکره کاهش می‌یابد.

عبارت چهارم: نادرست است؛ زیرا حدود ۷۵ درصد از جرم کل هواکره در لایه اول قرار دارد. (دهم - فصل دوم، ص ۴۹)

۵۷. گزینه ۲ درست است.

با افزایش دمای هوای مایع، ابتدا گاز N_2 (نقطه‌جوش $= -196^\circ C$)، سپس گاز Ar (نقطه‌جوش $= -186^\circ C$) و در نهایت گاز O_2 (نقطه‌جوش $= -183^\circ C$) جدا می‌شود:

$(A: N_2, X: Ar, D: O_2)$

عبارت‌های سوم و چهارم درست‌اند. بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: نادرست است؛ با هم ببینیم:

$$\begin{cases} \text{نقطه‌جوش}: & O_2 > Ar > N_2 \\ \text{واکنش پذیری}: & O_2 > N_2 > Ar \end{cases}$$

عبارت دوم: نادرست است؛ زیرا عنصر اکسیژن در ساختار همه مولکول‌های زیستی مانند کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها و پروتئین‌ها یافت می‌شود. (دهم - فصل دوم، ص۵۲)

۵۸. گزینه ۳ درست است.

فشار گاز اکسیژن در سطح زمین (ارتفاع صفر کیلومتر) حدود ۰٫۲ اتمسفر است. (رد گزینه‌های ۱ و ۲). همچنین رابطه فشار گاز اکسیژن و ارتفاع از سطح زمین غیرخطی است. (رد گزینه ۴) (دهم - فصل دوم، ص ۵۴)

۵۹. گزینه ۱ درست است.

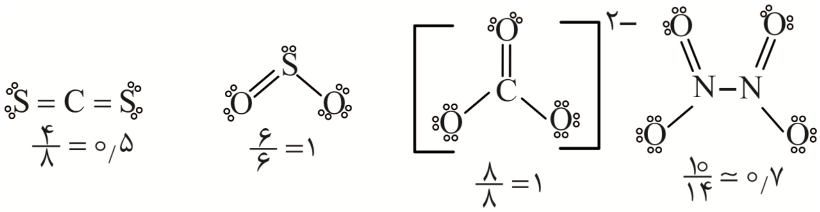
فقط نام SF_6 (گوگرد هگزا فلوئورید) به‌درستی بیان شده است.

بررسی سایر ترکیبات:

N_2O_5: دی‌نیتروژن پنتااکسید / NCl_3: نیتروژن تری‌کلرید / CuS: مس (II) سولفید / $FeCO_3$: آهن (II) کربنات / Mn_2O_3: منگنز (III) اکسید (دهم - فصل دوم، ص ۵۷)

۶۰. گزینه ۱ درست است.

نسبت خواسته‌شده در کربن دی‌سولفید نسبت به سایر گونه‌ها کوچک‌تر است:



(دهم - فصل دوم، ص ۵۸)

۶۱. گزینه ۲ درست است.

مورد اول: نادرست است؛ زیرا مجموع تعداد مولکول‌ها در دو طرف واکنش لزوماً یکسان نیست.

مورد دوم: درست است.

مورد سوم: درست است.

مورد چهارم: نادرست است؛ زیرا مجموع جرم مولی مواد در دو طرف واکنش لزوماً یکسان نیست.

مورد پنجم: نادرست است؛ زیرا در واکنش‌ها می‌توان از بین رفتن مولکول‌های واکنش‌دهنده و به‌وجود آمدن مولکول‌های فرآورده را مشاهده کرد. (دهم - فصل دوم، ص ۶۳)

۶۲. گزینه ۴ درست است.

اختلاف مجموع ضرایب در دو معادله داده‌شده برابر ۲۳ است:

$$\mathrm{I)}\ 2Ca_3(PO_4)_2 + 6SiO_2 + 10C \rightarrow 6CaSiO_3 + P_4 + 10CO \rightarrow 35$$

$$\mathrm{II)}\ 5P_2H_4 \rightarrow 6PH_3 + P_4H_2 \rightarrow 12$$

(دهم - فصل دوم، ص ۶۵)

۶۳. گزینه ۲ درست است.

به غیر از مساحت برف در نیمکره شمالی، سایر موارد به‌طور کلی افزایش یافته‌اند. (دهم - فصل دوم، ص ۶۷)

۶۴. گزینه ۲ درست است.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه ۱: شواهد نشان می‌دهند که فصل بهار در نیمکره شمالی زمین، نسبت به ۵۰ سال گذشته، در حدود یک هفته زودتر آغاز می‌شود.

گزینه ۳: اگر گازه‌های گلخانه‌ای وجود نداشتند، میانگین دمای کره زمین به $-18^\circ C$ کاهش می‌یافت.

گزینه ۴: بخش کوچکی از پرتوهای خورشیدی بازتابیده شده و به فضا برمی‌گردد. (دهم - فصل دهم، ص ۶۹)

۶۵. گزینه ۲ درست است.

موارد «الف» و «ج» درست‌اند. بررسی سایر عبارت‌ها:

ب: هنگامی‌که تابش فرابنفش به مولکول اوزون می‌رسد، پیوند اشتراکی بین دو اتم اکسیژن می‌شکنند.

د: مدل فضا پرکن اوزون و کربن دی‌اکسید متفاوت است:

(O_3) (CO_2)

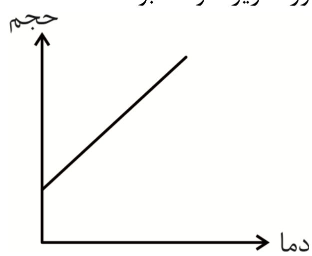
(دهم - فصل دوم، صفحات ۷۳ ، ۷۴ و ۷۵)

۶۶. گزینه ۳ درست است.

عبارت‌های «دوم» و «چهارم» نادرست‌اند:

عبارت دوم: با افزایش فشار یک گاز در دمای ثابت، حجم نمونه گاز کاهش می‌یابد.

عبارت چهارم: در دمای $۰^{\circ}C$ $(۲۷۳k)$ حجم گازها صفر لیتر نخواهد بود و نمودار درست به‌صورت زیر خواهد بود:



(دهم - فصل دوم صفحات ۷۶ ، ۷۷ و ۷۸)

۶۷. گزینه ۴ درست است.

ابتدا چگالی $XCl_۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$d_{XCl_۲}=\frac{۲/۰۳g}{(\frac{۱}{۴})L}=۸/۱۲g.L^{-۱}$$

حال جرم مولی $XXl_۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d_{CO_۲}}{d_{XCl_۲}}=\frac{\text{جرم مولی }CO_۲}{\text{جرم مولی }XCl_۲}\Rightarrow\frac{۱/۷۶}{۸/۱۲}=\frac{۴۴}{(X+۷۱)}$$

$$X+۷۱=۲۰۳\rightarrow X=۱۳۲g.mol^{-۱}$$

(دهم - فصل دوم، صفحات ۷۶ ، ۷۷ و ۷۸)

۶۸. گزینه ۳ درست است.

معادله موازنه‌شده به‌صورت روبه‌رو است:

$$۴KClO_۳+۴H_۲SO_۴\rightarrow ۴KHSO_۴+O_۲+۴ClO_۲+۲H_۲O$$

ابتدا جرم آب تولیدی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{ضریب}\times\text{جرم مولی}}{\text{گرم }KClO_۳}=\frac{\text{ضریب}\times\text{جرم مولی}}{\text{گرم }H_۲O}$$

$$\frac{۴\times۱۲۲/۵}{۷۳/۵g}=\frac{۲\times۱۸}{xg}\Rightarrow X=۵/۴gH_۲O$$

حال حجم گاز اکسیژن تولیدی در شرایط STP را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{ضریب}\times\text{جرم مولی}}{\text{گرم }KClO_۳}=\frac{\text{ضریب}\times۲۲/۴}{\text{حجم }O_۲}$$

$$\frac{۴\times۱۲۲/۵}{۷۳/۵g}=\frac{۱\times۲۲/۴}{y_L}\Rightarrow y=۳/۳۶LO_۲$$

(دهم - فصل دوم، صفحات ۷۹ و ۸۰)

۶۹. گزینه ۱ درست است.

ابتدا واکنش‌های داده‌شده را موازنه می‌کنیم و سپس ضریب ماده مشترک (یعنی $CO_۲$) را یکسان خواهیم کرد:

$$۴NaHCO_۳\rightarrow ۲Na_۲CO_۳+۲CO_۲+۲H_۲O$$

$$۲CO_۲+۲Li_۲O_۲\rightarrow ۲Li_۲CO_۳+O_۲$$

حال با استفاده از چگالی گاز اکسیژن، حجم این گاز را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}}{\text{گرم } NaHCO_۳} = \frac{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}}{\text{چگالی } O_۲ \times \text{حجم } O_۲}$$

$$\frac{۴\times۸۴}{۵۰/۴g} = \frac{۱\times۳۲}{X\times۱/۲} \Rightarrow X = ۴LitO_۲$$

(دهم - فصل دوم، صفحات ۷۹ و ۸۰)

۷۰. گزینه ۲ درست است.

۲) نادرست است؛ زیرا برای جداسازی $NH_۳$، مخلوط واکنش را تا مایع شدن آمونیاک سرد می‌کنیم.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) B فلز آهن است که از آن در طبیعت دو اکسید FeO و $Fe_۲O_۳$ شناخته شده است.

۳) گاز A همان گاز نیتروژن بوده که به علت نقطه جوش پایین‌تر نسبت به آمونیاک، دشوارتر از آن مایع می‌شود.

۴) درست است؛ با هم ببینیم:

$$N_۲(g) + ۳H_۲(g) \rightleftharpoons ۲NH_۳(g)$$

(دهم - فصل دوم، ص۸۲)

۷۱. گزینه ۳ درست است.

به‌جز عبارت‌های «دوم» و «چهارم»، سایر عبارت‌ها درست‌اند.

عبارت‌دوم: شربت معده، مخلوطی از نوع سوسپانسیون است.

عبارت چهارم: اندازه ذرات سازنده سوسپانسیون‌ها از سایر انواع مخلوط‌ها بزرگ‌تر است. (دهم - فصل اول، ص ۷)

۷۲. گزینه ۳ درست است.

ابتدا اجزای مخلوط را تعیین می‌کنیم:

I) صابون جامد با ۱۹ اتم کربن در زنجیر هیدروکربنی $\rightarrow C_{۱۹}H_{۳۹}COONa\,(RCOONa)$

II) پاک‌کننده غیرصابونی با ۲۹ اتم هیدروژن $\rightarrow C_{۱۸}H_{۲۹}SO_۳Na\,(R - C_۶H_۴ - SO_۳Na)$

در ادامه با استفاده از جرم گوگرد، جرم پاک‌کننده غیرصابونی را محاسبه می‌کنیم:

$$۱C_{۱۸}H_{۲۹}SO_۳Na \sim ۱S$$

$$\frac{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}}{\text{جرم } S} = \frac{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}}{\text{جرم پاک‌کننده}} \Rightarrow \frac{۱\times۳۲}{۱۲/۸g} = \frac{۱\times۳۴۸}{X_g} \rightarrow X = ۱۳۹/۲g$$

حال جرم صابون را به‌دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow[\text{صابون}]{\text{جرم}} ۳۳۹/۶ - ۱۳۹/۲ = ۲۰۰/۴g \text{ صابون}$$

در این مخلوط، صابون با یون $Ca^{۲+}$ موجود در آب سخت واکنش می‌دهد:

$$۲C_{۱۹}H_{۳۹}COONa + Ca^{۲+} \rightarrow (C_{۱۹}H_{۳۹}COO)_۲Ca_{(s)} + ۲Na^+$$

حال می‌توان جرم رسوب تولیدی را محاسبه کرد:

$$\frac{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}}{\text{جرم صابون}} = \frac{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}}{\text{جرم رسوب}} \Rightarrow \frac{۲\times۳۳۴}{۲۰۰/۴g} = \frac{۱\times۶۶۲}{y_g} \rightarrow y = ۱۹۸/۶g$$

(دوازدهم - فصل اول، ص ۹)

۷۳. گزینه ۳ درست است.

۳) لیتیم‌اکسید $(Li_۲O)$ اکسید فلزی بوده و باز آرنیوس به‌شمار می‌رود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) آرنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را با یک مبنای علمی طبقه‌بندی کرد.

۲) محلول همه اسیدها و بازهای آرنیوس، رسانای جریان برق‌اند.

۴) اغلب اکسیدهای نافلزی، اسید آرنیوس هستند. (دوازدهم - فصل اول، صفحات ۱۴ و ۱۵)

۷۴. گزینه ۳ درست است.

عبارت‌های دوم و چهارم نادرست هستند:

عبارت دوم: در یک سامانه تعادلی، غلظت گونه‌های موجود در محلول ثابت است.

عبارت چهارم: از آنجایی‌که اطلاعاتی دربارهٔ غلظت محلول دو اسید نداریم، نمی‌توانیم pH محلول‌های موردنظر را مقایسه کنیم.

در رابطه با عبارت پنجم به روابط زیر دقت کنید:

$$HCOOH \rightleftharpoons H^+ + HCOO^-$$

$$Ka = \frac{[H^+][HCOO^-]}{[HCOOH]} \xrightarrow{[H^+]=[HCOO^-]} Ka = \frac{[H^+]^۲}{[HCOOH]}$$

$$[HCOOH] = \frac{[H^+]^۲}{Ka}$$

(دوازدهم - فصل اول صفحات ۲۰، ۲۱ و ۲۲)

۷۵. گزینه ۲ درست است.

میانگین pH محتویات روده کوچک نسبت به سایر موارد بیشتر است. (دوازدهم - ص ۲۴)

۷۶. گزینه ۳ درست است.

۳) نادرست است؛ زیرا در سامانه‌های خنثی، غلظت یون هیدرونیوم با غلظت یون هیدروکسید برابر است.

(دوازدهم - فصل اول، ص ۲۶)

۷۷. گزینه ۲ درست است.

X ماده یا محلولی اسیدی است و می‌توان آن را به دی‌نیتروژن پنتااکسید، کربن دی‌اکسید و جوهرنمک نسبت داد.

(دوازدهم - فصل اول، ص ۲۶)

۷۸. گزینه ۱ درست است.

ابتدا غلظت مولار اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$M_{HBr} = \frac{\left(\frac{۴/۰۵\times۱۰^{-۳}\ g}{۸۱}\right)mol}{۰/۱L} = ۵\times۱۰^{-۴}\ mol.L^{-۱}$$

حال غلظت H^+ را به‌دست می‌آوریم:

$$[H^+] = M.\alpha \xrightarrow[(\alpha=۱)]{\text{اسید قوی است}} [H^+] = ۵\times۱۰^{-۴}\ mol.L^{-۱}$$

می‌توان pH محلول را محاسبه کرد:

$$pH = -\log[H^+] \rightarrow pH = -\log(۵\times۱۰^{-۴})$$

$$pH = -(\log ۵ - ۴) = ۳/۳$$

در ادامه باید غلظت OH^- را محاسبه کنیم:

$$[H^+]\times[OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \rightarrow ۵\times۱۰^{-۴}\times[OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \rightarrow [OH^-] = ۲\times۱۰^{-۱۱}\ mol.L^{-۱}$$

در انتها نسبت خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{[OH^-]}{[H^+]} = \frac{۲\times۱۰^{-۱۱}}{۵\times۱۰^{-۴}} = ۴\times۱۰^{-۸}$$

(دوازدهم- فصل اول، ص ۲۵)

۷۹. گزینه ۴ درست است.

ابتدا غلظت مولار اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولار} = \frac{\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی} \times ۱۰}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \frac{۱۰\times۴\times۱}{۵۰} = ۰/۸\,\mathrm{mol.L^{-۱}}$$

در ادامه می‌توانیم غلظت H^+ را به‌دست آوریم:

$$\begin{array}{llll} & HA \rightleftharpoons & H^+ \; + & A^- \\ \text{اولیه}: & ۰/۸ & ۰ & ۰ \\ \Delta: & -X & +X & +X \\ \hline \text{تعادلی}: & ۰/۸-X & X & X \end{array} \Rightarrow Ka=\frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \to ۵\times۱۰^{-۶}=\frac{X^۲}{۰/۸-X} \to X \simeq ۲\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{mol.L^{-۱}}$$

حال می‌توان pH را محاسبه کرد:

$$pH=-\log[H^+] \Rightarrow pH=-\log(۲\times۱۰^{-۳})=-(\log ۲-۳)=۲/۷$$

(دوازدهم - فصل اول ص ۲۵)

۸۰. گزینه ۲ درست است.

ابتدا ثابت یونش اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$Ka=\frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha} \Rightarrow Ka=\frac{۰/۲\times(۰/۲)^۲}{۱-۰/۲}=۱۰^{-۲}$$

با اضافه کردن آب در دمای ثابت، ثابت یونش تغییری نمی‌کند:

$$\xrightarrow{\text{در محلول رقیق}} Ka=۱۰^{-۲}$$

در محلول رقیق‌شده، غلظت H^+ را محاسبه می‌کنیم:

$$pH_{\text{رقیق}}=۲/۵ \to [H^+]=۱۰^{-۲/۵}=۱۰^{-۳}\times۱۰^{۰/۵}=۳\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{mol.L^{-۱}}$$

در ادامه باید غلظت محلول رقیق را محاسبه کنیم:

$$\begin{array}{llll} & HF \rightleftharpoons & H^+ \; + & F^- \\ \text{اولیه}: & M & ۰ & ۰ \\ \Delta: & -X & +X & +X \\ \hline \text{تعادلی}: & \cancel{M-X} & \cancel{X} & \cancel{X} \\ & M-۳\times۱۰^{-۳} & ۳\times۱۰^{-۳} & ۳\times۱۰^{-۳} \end{array} \qquad Ka=\frac{[H^+][F^-]}{[HF]} \to ۱۰^{-۲}=\frac{(۳\times۱۰^{-۳})^۲}{(M-۳\times۱۰^{-۳})}$$

$$M_{\text{رقیق‌شده}}=۳۹\times۱۰^{-۴}\ \mathrm{mol.L^{-۱}}$$

در انتها حجم آب اضافه‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$M_{\text{غلیظ}}\times V_{\text{غلیظ}}=M_{\text{رقیق}}\times V_{\text{رقیق}}$$

$$۰/۲\times۲۰^{mL}=۳۹\times۱۰^{-۴}\times V_{\text{رقیق}} \Rightarrow V_{\text{رقیق}}\simeq ۱۰۲۵mL$$