اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

سنجش دوازدهم

آزمـــون ۵ از ۱۴

شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

ویژهٔ یازدهمی‌ها

# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی سنجش دوازدهم ــ مرحلهٔ سوم (۱۴۰۲/۰۹/۱۰)

# علوم ریاضی و فنی (دوازدهم)

**کارنامهٔ آزمون، عصر روز برگزاری آن از طریق سایت اینترنتی زیر قابل مشاهده می‌باشد:**

**www.sanjeshserv.ir**

## مدیران، مشاوران و دبیران محترم دبیرستان‌ها و مراکز آموزشی

به منظور فراهم نمودن زمینهٔ ارتباط مستقیم مدیران، مشاوران و دبیران محترم دبیرستان‌ها و مراکز آموزشی همکار در امر آزمون‌های آزمایشی سنجش و بهره‌مندی از نظرات ارزشمند شما عزیزان در خصوص این آزمون‌ها ، آدرس پست الکترونیکی test@sanjeshserv.com معرفی می‌گردد. از شما عزیزان دعوت می‌شود، دیدگاه‌های ارزشمند خود را از طریق آدرس فوق با مدیر تولیدات علمی و آموزشی این مجموعه در میان بگذارید.

**کانال‌های ارتباطی:**

@sanjesheducationgroup
@sanjeshserv

## ریاضیات

**۱. گزینه ۳ درست است.**

صورت و مخرج کسرها را به کمک اتحادها ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{۲(۱+\sqrt{۳})}{\sqrt{۳}-\sqrt{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲}}}+\frac{۳^{۳}-(\sqrt{۲})^{۳}}{۱۱+\sqrt{۱۸}}=\frac{۲(۱+\sqrt{۳})}{\sqrt{۳}-(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}+\frac{(۳-\sqrt{۲})(۹+۲+۳\sqrt{۲})}{۱۱+\sqrt{۱۸}}$$

$$=\frac{۲(۱+\sqrt{۳})}{\sqrt{۲}}+\frac{(۳-\sqrt{۲})(۱۱+\sqrt{۱۸})}{۱۱+\sqrt{۱۸}}=\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۳})+۳-\sqrt{۲}=\sqrt{۶}+۳\Rightarrow A-\sqrt{۶}=۳$$

**۲. گزینه ۳ درست است.**

$$a+\frac{۲}{a}=۵\Rightarrow\frac{a^{۲}+۲}{a}=۵\Rightarrow a^{۲}=۵a-۲$$

$$a^{۲}+\frac{۱۰}{a}=۵a-۲+\frac{۱۰}{a}=\frac{۵a^{۲}-۲a+۱۰}{a}=\frac{۵(۵a-۲)-۲a+۱۰}{a}=\frac{۲۳a}{a}=۲۳$$

**۳. گزینه ۴ درست است.**

از اتحاد $۱+\sin x=(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^{۲}$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi^{-}}{۲}}\frac{\sqrt{(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^{۲}}}{(۱+\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}})\underbrace{(۱-\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}})}_{۲}}=\lim_{x\to\frac{۳\pi^{-}}{۲}}\frac{\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}}{\frac{\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}\times۲}=\lim_{x\to\frac{۳\pi^{-}}{۲}}\frac{\cos\frac{x}{۲}}{۲}=\frac{-\sqrt{۲}}{۴}$$

**۴. گزینه ۴ درست است.**

وارون تابع $f$ را می‌یابیم:

$$y=۴x+a\to x=\frac{y-a}{۴}\to f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x-\frac{a}{۴}$$

حال حاصل حد را بررسی می‌کنیم:

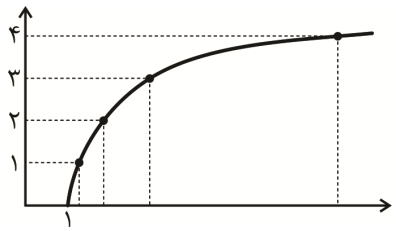
$$\lim_{x\to b}\frac{(۴x+a)-۲(\frac{۲x}{۴}-\frac{a}{۴})}{x-b}=\lim_{x\to b}\frac{۳x+\frac{۳}{۲}a}{x-b}$$

حاصل حد زمانی وجود دارد که صورت کسر به‌ازای $x=b$ برابر صفر شود.

$$۳b+\frac{۳}{۲}a=۰\Rightarrow a=-۲b\Rightarrow\lim_{x\to b}\frac{۳x+\frac{۳}{۲}(-۲b)}{x-b}=\lim_{x\to b}\frac{۳x-۳b}{x-b}=۳$$

حاصل حد برابر ۳ و $\frac{a}{b}=-۲$ است پس حاصل حد، $-\frac{۳}{۲}$ برابر $\frac{a}{b}$ است.

**۵. گزینه ۱ درست است.**



هرگاه عبارت $۲\sqrt{x-۱}$ برابر عدد صحیح باشد، تابع f ناپیوسته است.

بیشترین مقدار $\alpha$ زمانی است که $۲\sqrt{\alpha-۱}=۶$ باشد پس $\sqrt{\alpha-۱}=۳$ و درنتیجه $\alpha=۱۰$ است.

**۶. گزینه ۴ درست است.**

با توجه به علامت f در دو طرف $x=۲$ و $x=۶$ حاصل حدها را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to ۲^+} g(x)=\frac{(-۱)^۲}{f(۲^+)-f(۶^+)}=\frac{۱}{۰^- -(۰^+)}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to ۲^-} g(x)=\frac{(-۱)^۱}{f(۲^-)-f(۶^-)}=\frac{-۱}{۰^+ -۰^-}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

**۷. گزینه ۱ درست است.**

فرض کنید $f(x)=ax+b$ و $a<۰$ باشد.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(۲x+۱)-۱}{fof(x)+۴}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a(۲x+۱)+b-۱}{a(ax+b)+b+۴}=\frac{۲a}{a^۲}=\frac{۲}{a}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow a=-۴$$

حاصل حد خواسته‌شده زمانی وجود دارد که صورت کسر برابر صفر باشد.

$$f(x-۱)-۵=۰\xrightarrow{x=۴}f(۳)=۵\Rightarrow -۱۲+b=۵\Rightarrow b=۱۷$$

$$\lim_{x\to۴}\frac{a(x-۱)+b-۵}{\sqrt{x}-۲}=\lim_{x\to۴}\frac{-۴x+۱۶}{\sqrt{x}-۲}=\lim_{x\to۴}\frac{-۴(\cancel{\sqrt{x}-۲})(\sqrt{x}+۲)}{\cancel{\sqrt{x}-۲}}=-۱۶$$

**۸. گزینه ۳ درست است.**

پرانتز اول را در مزدوج خود ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sqrt{k}-x+۳)(\sqrt{kx}+\sqrt{kx+۱})}{\sqrt{x+\sqrt{k}}+\sqrt{x-۳}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{k}+۳)(\cancel{\sqrt{kx}+\sqrt{kx}}^{۲\sqrt{kx}})}{\cancel{\sqrt{x}+\sqrt{x}}_{۲\sqrt{x}}}$$

$$=(\sqrt{k}+۳)(\sqrt{k})=۱۸\Rightarrow k+۳\sqrt{k}=۱۸\Rightarrow(\sqrt{k}-۳)(\sqrt{k}+۶)=۰\Rightarrow\sqrt{k}=-۶\ \text{غ ق ق}\quad \sqrt{k}-۳=۰$$
$$\Rightarrow k=۹$$

**۹. گزینه ۲ درست است.**

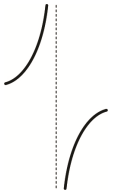
ضابطه تابع f به‌صورت $f(x)=(x+۲)^۳$ و وارون آن به‌صورت $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}-۲$ است. به‌ازای $x=۸$ مخرج هر دو کسر برابر صفر است.

$$g(x)=\frac{۱}{f^{-۱}(x)}-\frac{۱}{f(x-۱۰)}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۲}-\frac{۱}{(x-۸)^۳}=\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{x}}{x-۸}-\frac{۱}{(x-۸)^۳}$$

$$=\frac{(x-۸)^۲(\sqrt[۳]{x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{x})-۱}{(x-۸)^۳}$$

$$\lim_{x\to ۸^+} g(x)=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to ۸^-} g(x)=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$



پس نمودار به‌صورت است.

**۱۰. گزینه ۱ درست است.**

ابتدا دقت کنید که:

$$\frac{-۳x+۱}{x-۱}=-۳+\frac{-۲}{x-۱}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}[-۳+\frac{-۲}{x-۱}]=[-۳+(۲)^-]=-۲$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(-\frac{۱}{x})=\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}[-۳+\frac{-۲}{x-۱}]=[-۳+۰^-]=-۴$$

حاصل جمع دو حد بالا برابر $-۶$ است.

**۱۱. گزینه ۴ درست است.**

$$\lim_{x\to \pm\infty} y=\frac{۴}{m}\Rightarrow y=\frac{۴}{m}$$ مجانب افقی

مخرج باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد. چون نقطهٔ برخورد مجانب‌ها در ناحیهٔ دوم است، پس اولاً $\frac{۴}{m}$ مثبت است.

ثانیاً $x=-\frac{۴}{m}$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

$$۱)\ m>۰$$

$$۲)\ mx^۲+۲nx+۴m=m(x+\frac{۴}{m})^۲=mx^۲+۸x+\frac{۱۶}{m}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲n=۸\Rightarrow n=۴\\ ۴m=\frac{۱۶}{m}\Rightarrow m^۲=۴\overset{m>۰}{\Rightarrow} m=۲\end{cases}\Rightarrow m+n=۶$$

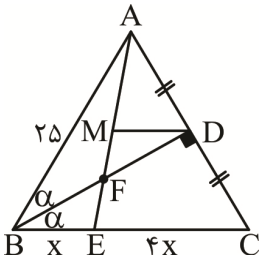
**۱۲. گزینه ۴ درست است.**

فرض کنید $x=\frac{۱}{t}$ باشد به‌طوری که $t\to ۰^+$

$$\lim_{x\to +\infty} x\times\cos\frac{\pi x}{۲x-۱}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۱}{t}\cos\frac{\frac{\pi}{t}}{\frac{۲}{t}-۱}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۱}{t}\cos\frac{\pi}{۲-t}$$

$$\lim_{t\to ۰^+}\frac{۱}{t}\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲-t})=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۱}{t}\sin\frac{-\pi t}{۴-۲t}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{-۱}{t}\frac{\pi t}{۴-۲t}\times\frac{\sin\frac{\pi t}{۴-۲t}}{\frac{\pi t}{۴-۲t}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{-\pi}{۴-۲t}\times ۱=\frac{-\pi}{۴}$$

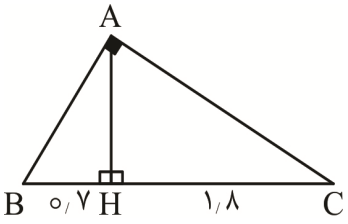
**۱۳. گزینه ۲ درست است.**




با توجه به اینکه BD نیمساز $\hat{B}$ و BD بر AC عمود است، پس BD عمودمنصف AC و مثلث ABC متساوی‌الساقین است، یعنی $AB = BC = ۲۵$؛ از طرفی $\frac{BE}{EC} = \frac{۱}{۴}$ پس بنابر نام‌گذاری‌های روی شکل: $BC = ۵x \Leftarrow \boxed{x = ۵}$

D و M وسط‌های AC و AE هستند پس MD نصف EC است، یعنی: $MD = ۲x = ۱۰$.

**۱۴. گزینه ۳ درست است.**

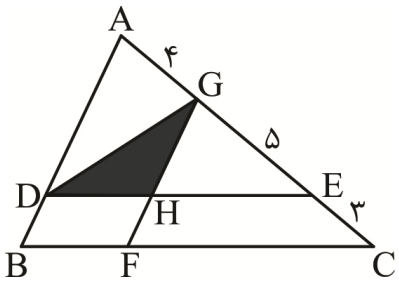



بزرگ‌ترین ارتفاع هر مثلث قائم‌الزاویه همان ضلع قائمهٔ بزرگ‌تر است. از طرفی بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه: $AC^۲ = CH.BC$، پس داریم:

$$AC^۲ = ۱/۸(۰/۷+۱/۸) = \frac{۱۸}{۱۰}\times\frac{۲۵}{۱۰} \Rightarrow AC = \frac{۳\times۵\sqrt{۲}}{۱۰} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۲} = ۱/۵\sqrt{۲}$$

**۱۵. گزینه ۲ درست است.**

بنابر متن صفحهٔ ۳۲ کتاب هندسهٔ ۱، نسبت مساحت‌های دو مثلث با رأس مشترک که قاعده‌های آن‌ها روی یک خط قرار دارد، برابر با نسبت قاعده‌ها است. از سوی دیگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر با توان دوم نسبت تشابه است. پس در اینجا خواهیم داشت:




$$\frac{S_{\Delta DHG}}{S_{\Delta GHE}} = \frac{DH}{HE} \underset{\text{تالس}}{=} \frac{AG}{GE} = \frac{۴}{۵} \qquad (۱)$$

$$\Delta GHE \sim \Delta GFC \Rightarrow \frac{S_{\Delta GHE}}{S_{\Delta GFC}} = (\frac{GE}{GC})^۲ = (\frac{۵}{۸})^۲ = \frac{۲۵}{۶۴} \qquad (۲)$$

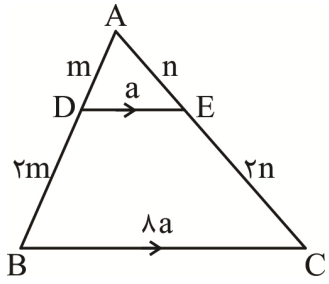
$$\Delta GFC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{\Delta GFC}}{S_{\Delta ABC}} = (\frac{GC}{AC})^۲ = (\frac{۸}{۱۲})^۲ = \frac{۴}{۹} \qquad (۳)$$

اکنون با ضرب سه رابطهٔ (۱) ، (۲) و (۳) در یکدیگر داریم:

$$\frac{S_{\Delta DHG}}{\cancel{S_{\Delta GHE}}}\times\frac{\cancel{S_{\Delta GHE}}}{\cancel{S_{\Delta GFC}}}\times\frac{\cancel{S_{\Delta GFC}}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta DHG}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{۴}{۵}\times\frac{۲۵}{۶۴}\times\frac{۴}{۹} = \frac{۵}{۳۶}$$

**۱۶. گزینه ۴ درست است.**

با توجه به عکس قضیهٔ تالس داریم:




$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow DE \parallel BC$$

پس دو مثلث ADE و ABC به نسبت $\frac{۱}{۳}$ متشابه‌اند. درنتیجه نسبت مساحت آن‌ها $\frac{۱}{۹}$ است.

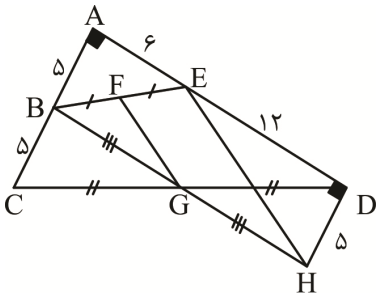
حال می‌توان نوشت:

$$S_{\Delta ADE} = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = ۹a \Rightarrow S_{BDEC} = ۹a - a = ۸a$$

بنابراین:

$$\frac{S_{BDEC}}{S_{ABC}} = \frac{۸a}{۹a} = \frac{۸}{۹}$$

**۱۷. گزینه ۴ درست است.**




پاره‌خط BG را از طرف G و به‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم. $(BG = GH)$ با توجه به عکس قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BG}{GH} = ۱ \Rightarrow FG \parallel EH$$

با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{FG}{EH} = \frac{BF}{BE} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow FG = \frac{EH}{۲}$$

از طرف دیگر چهارضلعی با رأس‌های B، C، H و D یک متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهای آن یکدیگر را نصف کرده‌اند. پس نتیجه می‌گیریم: $DH = BC = ۵$ و داریم:

$$\left.\begin{matrix} DH \parallel AC \\ \angle A = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle ADH = ۹۰^\circ$$

حال با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث EDH داریم:

$$EH^۲ = ۵^۲ + ۱۲^۲ \Rightarrow EH = ۱۳ \Rightarrow FG = \frac{EH}{۲} = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$$

**۱۸. گزینه ۳ درست است.**

با توجه به فرض داریم:

$$|۳A| = \begin{vmatrix} ||A|-۲ & |A|+۱ \\ -۹ & |A|-۸ \end{vmatrix}$$

چون A ماتریس ۲×۲ است، پس بنابر تمرین ۹ صفحهٔ ۳۱ کتاب هندسهٔ ۳: $|۳A| = ۹|A|$ است. حال اگر فرض کنیم $|A| = t$، آنگاه:

$$۹t = \begin{vmatrix} t-۲ & t+۱ \\ -۹ & t-۸ \end{vmatrix} = (t-۲)(t-۸) + ۹(t+۱) = t^۲ - ۱۰t + ۱۶ + ۹t + ۹$$

$$\Rightarrow t^۲ - ۱۰t + ۲۵ = ۰ \Rightarrow t = ۵$$

درنتیجه: $|۲A| = ۴|A| = ۴t = ۲۰$

**۱۹. گزینه ۱ درست است.**

$$A = \begin{bmatrix} -۳ & -۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۲\times -۳ - (۴\times -۱) = -۲ \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۴ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -\frac{۱}{۲} \\ ۲ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

$$A^۲ = \begin{bmatrix} -۳ & -۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۳ & -۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ -۴ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^۲ = \alpha A + \beta A^{-۱} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ -۴ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳\alpha & -\alpha \\ ۴\alpha & ۲\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta & -\frac{\beta}{۲} \\ ۲\beta & \frac{۳\beta}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳\alpha-\beta & -\alpha-\frac{\beta}{۲} \\ ۴\alpha+۲\beta & ۲\alpha+\frac{۳\beta}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{برابری درایه‌های نظیر}}\begin{cases}-۳\alpha-\beta=۵\\ -\alpha-\frac{\beta}{۲}=۱\\ ۴\alpha+۲\beta=-۴\end{cases}\xrightarrow{\div ۲}\alpha+\beta=-۲\Rightarrow\boxed{\beta=-۲-۲\alpha}\qquad(*)$$

$$۲\alpha+۳\frac{\beta}{۲}=۰$$

با جای‌گذاری $\beta$ برحسب $\alpha$ از کادر بالا در معادلهٔ نخست، خواهیم داشت:

$$-۳\alpha-(-۲-۲\alpha)=۵\Rightarrow-\alpha+۲=۵\Rightarrow\alpha=-۳\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در }(*)}\beta=-۲+۶=۴$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta=۴-۳=۱$$

توجه کنید که مقدارهای $\alpha$ و $\beta$ که به‌دست آمده‌اند، در همهٔ چهار معادلهٔ درون آکولاد صدق می‌کنند.

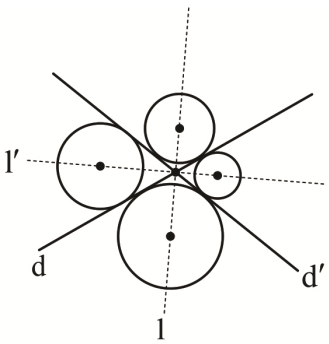
**۲۰. گزینه ۱ درست است.**

$$\begin{cases}ax+by=۳\\ cx+dy=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۵\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۳\\ ۵\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۵}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ ۵\end{bmatrix}$$

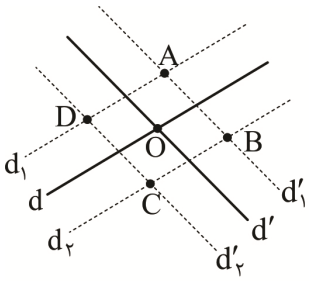
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۵}\begin{bmatrix}۳d-۵d\\ -۳c+۵a\end{bmatrix}\Rightarrow y=\frac{۱}{۱۵}(\overbrace{-۳c+۵a}^{-۳۰})=-۲$$

**۲۱. گزینه ۴ درست است.**

چون مکان هندسی نقاطی که بر دو خط $d$ و $d'$ مماس هستند، دو خط عمودند، پس خط‌های $d$ و $d'$ باید متقاطع باشند (خط‌چین‌ها مکان هندسی یاد شده‌اند که همیشه نیمسازهای زوایای میان $d$ و $d'$ هستند و برای نمونه، در اینجا ۴ تا از دایره‌های مماس رسم شده‌اند). از سوی دیگر می‌دانیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خطی مفروض به یک فاصله باشند، عبارت است از دو خط موازی و هم فاصله در دو طرف خط یادشده. پس اگر خط‌های موازی به فاصلهٔ ثابت $k>۰$ را از هر دو خط $d$ $d'$ رسم کنیم (خط‌چین‌ها در شکل ۲) در چهار نقطهٔ A، B، C و D با هم برخورد می‌کنند. چهارضلعی ABCD در حالت کلی یک لوزی است و دایره‌ای از رأس‌های آن نمی‌گذرد، اما در حالتی که $d$ و $d'$ نیز عمود بر هم باشند، آنگاه لوزی ABCD یک مربع می‌شود که دقیقاً یک دایره از رأس‌هایش می‌گذرد. از این رو حداکثر یک دایره با ویژگی مورد نظر یافت می‌شود.



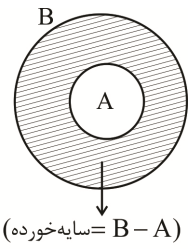

**شکل (۱)**




**شکل (۲)**

**۲۲. گزینه ۳ درست است.**

چون $A\cup B=B$، پس $A\subseteq B$. از سوی دیگر می‌توانیم بنویسیم $B=(B-A)\cup A$، پس به کمک اصول احتمال خواهیم داشت:




$$P(A\cup B')=P(A'\cap B)'=۱-P(B\cap A')=۱-P(B-A)=\frac{۱۱}{۲۰}$$

$$\Rightarrow P(B-A)=۱-\frac{۱۱}{۲۰}=\frac{۹}{۲۰}\qquad(۱)$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱۳}{۱۵}=\frac{۲}{۱۵} \quad (۲)$$

$$\overset{(۱),(۲)}{\Rightarrow} \quad P(B)=P\big((B-A)\cup P(A)\big)=P(B-A)+P(A)=\frac{۹}{۲۰}+\frac{۲}{۱۵}=\frac{۲۷+۸}{۶۰}=\frac{۷}{۱۲}$$

**۲۳. گزینه ۴ درست است.**

در پرتاب سه تاس $n(S)=۶^۳$ و برآمدهایی که مجموع آن‌ها برابر ۱۵ می‌شود، به‌صورت زیر است:

$۶+۶+۳ \rightarrow$ ۳ حالت

$۶+۵+۴ \rightarrow$ ۳! حالت

$۵+۵+۵ \rightarrow$ ۱ حالت

همچنین اگر بخواهیم دقیقاً دو بار عدد ۶ ظاهر شود، تعداد حالت‌ها برابر $\binom{۳}{۲}\times\binom{۵}{۱}$ است. حال اگر پیشامد اینکه مجموع برآمدهای سه تاس برابر ۱۵ شود را $A$ و پیشامد اینکه دقیقاً دو بار عدد ۶ ظاهر شود را $B$ در نظر بگیریم، داریم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=(۳+۳!+۱)+\binom{۳}{۲}\times۵-۳=۲۲$$

$$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(s)}=\frac{۲۲}{۶^۳}=\frac{۲۲}{۲۱۶}=\frac{۱۱}{۱۰۸}$$

**۲۴. گزینه ۲ درست است.**

با توجه به داده‌های سؤال، داریم:

$$P(A)=\frac{۱}{۶}\Rightarrow P(a)+P(b)=\frac{۱}{۶}$$

$$P(B)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \underbrace{P(a)+P(b)}_{\frac{۱}{۶}}+P(f)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(f)=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$P(C)=\frac{۳}{۷}\Rightarrow \underbrace{P(a)+P(b)}_{\frac{۱}{۶}}+P(d)+P(e)=\frac{۳}{۷}\Rightarrow P(d)+P(e)=\frac{۱۱}{۴۲}$$

$$P(D)=\underbrace{P(a)+P(b)}_{\frac{۱}{۶}}+\underbrace{P(e)+P(d)}_{\frac{۱۱}{۴۲}}+\underbrace{P(f)}_{\frac{۱}{۶}}=\frac{۲۵}{۴۲}$$

**۲۵. گزینه ۳ درست است.**

می‌دانیم $[r]_m=\{x\in\mathbb{Z}\mid x=mk+r\}$ که در آن $m$ عددی طبیعی است و $۰\le r<m$ و از سوی دیگر $m\mid x-y\Leftrightarrow [x]_m=[y]_m$؛ حال به بررسی گزاره‌ها می‌پردازیم:

الف) $[۱۷]_۵=[۱۲]_۵\Leftrightarrow ۱۷\overset{۵}{\equiv}۱۲\Leftrightarrow ۵\mid ۱۷-۱۲\Leftrightarrow ۵\mid ۵$ ✓

ب) $\forall x\in[۲۳]_۶\ ;\ x\overset{۶}{\equiv}۲۳\xrightarrow{۳\mid ۶}x\overset{۳}{\equiv}۲۳\overset{۳}{\equiv}۲\Rightarrow x\in[۲]_۳$ ✓

پ) $\forall x\in[۳۷]_{۲۴}\ ;\ x\overset{۲۴}{\equiv}۳۷\Rightarrow x\overset{۹}{\not\equiv}۳۷$ (زیرا، $۹\not\mid ۲۴$)

درنتیجه تنها گزاره‌های «الف» و «ب» درست هستند.

**۲۶. گزینه ۱ درست است.**

بنابر ویژگی‌های هم‌نهشتی، می‌توان طرفین هم‌نهشتی را به توان رساند یا در عددی ضرب کرد. می‌دانیم: $۳۱ \overset{۱۶}{\equiv} -۱$، پس $۳۱^{۱۳} \overset{۱۶}{\equiv} (-۱)^{۱۳} = -۱$ و درنتیجه: $(*)\ ۳۱^{۱۳} \times ۹ \overset{۱۶}{\equiv} -۹$ ؛ از سوی دیگر $۴۱ \overset{۱۶}{\equiv} ۹$، پس $۴۱^۲ \overset{۱۶}{\equiv} ۹^۲ \overset{۱۶}{\equiv} ۱$ که نتیجه می‌دهد:

$$(۴۱^۲)^۷ \overset{۱۶}{\equiv} ۱^۷ \Rightarrow ۴۱^{۱۴} \overset{۱۶}{\equiv} ۱ \qquad (**)$$

حال اگر رابطهٔ (**) را از (*) کم کنیم، داریم:

$$۳۱^{۱۳} \times ۹ - ۴۱^{۱۴} \overset{۱۶}{\equiv} -۹ - ۱ \overset{۱۶}{\equiv} ۶ \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = ۶$$

**۲۷. گزینه ۱ درست است.**

روش اول:

$$۳^۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \xrightarrow{\times ۳} ۳^۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۵ \Rightarrow ۳^۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\times ۳} ۳^۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۲$$

$$\Rightarrow ۳^۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۳^۵)^{۴۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۲۰۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۳^۳} ۳^{۲۰۳} \overset{۱۱}{\equiv} ۲۷ \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۳^{۲۰۳} \overset{۱۱}{\equiv} ۵$$

از طرفی طبق فرض داریم $۳^{۲۰۳} + a \overset{۱۱}{\equiv} ۰$ درنتیجه:

$$۵ + a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \xrightarrow[\text{عدد طبیعی}]{a\text{، کوچک‌ترین}} a = ۶$$

روش دوم (روش فرما): اگر $p$ عددی اول و $(a,p) = ۱$، آنگاه $a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$؛ درنتیجه:

$$۳^{۱۱-۱} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۲۰۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۳^۳} ۳^{۲۰۳} \overset{۱۱}{\equiv} ۲۷ \overset{۱۱}{\equiv} ۵$$

از طرفی طبق فرض داریم: $۳^{۲۰۳} + a \overset{۱۱}{\equiv} ۰$ لذا:

$$۵ + a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \xrightarrow[\text{عدد طبیعی}]{a\text{، کوچک‌ترین}} a = ۶$$

**۲۸. گزینه ۳ درست است.**

عددی بر ۳۶ بخش‌پذیر است که هم بر ۴ و هم بر ۹ بخش‌پذیر باشد. می‌دانیم که عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌هایش بر ۹ بخش‌پذیر باشد و عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقمِ سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد. به کمک این مطالب خواهیم داشت (توجه کنید که $۰ \le a, b \le ۹$):

$$\begin{cases} ۴b \overset{۴}{\equiv} ۰ \\ b + ۸ + a + ۷ + ۴ + b \overset{۹}{\equiv} ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = ۰ \text{ یا } ۴ \text{ یا } ۸ \\ a + ۲b + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۰ \end{cases}$$

اما دقت کنید که $b = ۰$ پذیرفتنی نیست، زیرا در این صورت عدد $\overline{b۸a۷۴b}$ شش‌رقمی نخواهد بود. پس دو حالت داریم:

$$۱)\ b = ۴ \Rightarrow a + ۲ \times ۴ + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow a + ۹ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow a = ۰ \text{ یا } ۹$$

$$۲)\ b = ۸ \Rightarrow a + ۲ \times ۸ + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow a + ۱۷ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow a = ۱$$

از این‌رو سه عدد شش‌رقمی موردنظر یافت می‌شود.

**۲۹. گزینه ۲ درست است.**

در ابتدا تعداد روزهایی را که از اول خرداد تا ۶ بهمن قرار دارد، به‌دست می‌آوریم:

$$\underbrace{\text{خرداد}}_{۳۰} + \underbrace{\text{تیر} + \text{مرداد} + \text{شهریور}}_{۳ \times ۳۱} + \underbrace{\text{مهر} + \text{آبان} + \text{آذر} + \text{دی}}_{۴ \times ۳۰} + \underbrace{\text{بهمن}}_{۶} = ۳۰ + ۹۳ + ۱۲۰ + ۶ = ۲۴۹$$

حال با توجه به اینکه $۲۴۹ \overset{۷}{\equiv} ۴$ پس به کمک جدول متناظر با روزهای هفته (به‌دلیل برگشت به روزهای عقب سال، در جهت وارون عددگذاری شده)، نخست اول خرداد را می‌یابیم که می‌شود روز یکشنبه.

| شنبه | یکشنبه | دوشنبه | سه‌شنبه | چهارشنبه | پنج‌شنبه | جمعه |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۵ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ | ۰ | ۶ |

یا می‌توانیم این‌گونه هم استدلال کنیم که ۶ بهمن، چهار روز جلوتر از اول خرداد در هفته قرار دارد. پس چهار روز از ۶ بهمن که پنج‌شنبه است به عقب برگردیم، اول خرداد (همان‌گونه که جدول هم نشان می‌دهد) یکشنبه خواهد بود. پس:

اولین دوشنبهٔ خرداد = ۲ خرداد  دومین دوشنبهٔ خرداد = ۹ خرداد  سومین دوشنبهٔ خرداد = ۱۶ خرداد

**۳۰. گزینه ۴ درست است.**

فرض کنیم $d = (m^۲ + ۴, ۳m + ۱)$، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} d \mid m^۲ + ۴ \\ d \mid ۳m + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid ۹(m^۲ + ۴) = ۹m^۲ + ۳۶ \\ d \mid (۳m + ۱)(۳m - ۱) = ۹m^۲ - ۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل دو عدد را می‌شمارد } d} d \mid ۹m^۲ + ۳۶ - (۹m^۲ - ۱) = ۳۷ \xrightarrow{d \neq ۱} d = ۳۷$$

از سوی دیگر، معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,m) \mid b$ پس باید داشته باشیم:

$$۳۷ \mid b \Rightarrow b = ۳۷k \ (k \in \mathbb{N})$$

$$\xrightarrow{b \text{ سه رقمی است.}} ۱۰۰ \le ۳۷k \le ۹۹۹ \Rightarrow ۳ \le k \le ۲۷ \Rightarrow \text{تعداد } k \text{ ها} = ۲۷ - ۳ + ۱ = ۲۵$$

## فیزیک

**۳۱. گزینه ۲ درست است.**

گام اول: از قضیه کار و انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم و تغییر ارتفاع $h$ را حساب می‌کنیم.

$$W_t = K_۲ - K_۱ \rightarrow \underbrace{W_F}_{\text{کار نیروی } F} + \underbrace{W_{mg}}_{\text{کار نیروی وزن}} + \underbrace{W_f}_{\text{کار نیروی مقاومت هوا}} = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ - ۰$$

$$۶۰h + (-۴۰h - \frac{۴۰}{۴}h) = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۵^۲$$

$$h = \frac{۵۰}{۱۰} = ۵m$$

گام دوم: کار نیروی وزن را حساب می‌کنیم:

$$W_{mg} = -۴۰ \times ۵ = -۲۰۰$$

گام سوم: با استفاده از رابطهٔ $\Delta u_g = -w_{\text{وزن}}$ تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم را حساب می‌کنیم:

$$\Delta u_g = -(-۲۰۰) = ۲۰۰J$$

(فصل ۳ - صفحات ۶۱، ۶۵، ۷۸، ۷۹)

**۳۲. گزینه ۱ درست است.**

در نبرد نیروهای مقاوم، انرژی مکانیکی یعنی مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل جسم ثابت می‌ماند و لذا می‌توانیم انرژی مکانیکی را در هر نقطه دلخواه مسیر محاسبه کنیم. اندازه سرعت گلوله در نقطه اوج طبق فرض، $\frac{۱}{۲}$ برابر لحظه پرتاب بوده و این یعنی انرژی جنبشی، $\frac{۱}{۴}$ برابر لحظه پرتاب است.

$$K=\frac{۱}{۲}mv^{۲}\xrightarrow{(\frac{۱}{۲})^{۲}}K=\frac{۱}{۴}E$$

ثابت — $\frac{۱}{۴}$ برابر

پس در نقطه اوج، $\frac{۳}{۴}$ انرژی مکانیکی به‌صورت انرژی پتانسیل ظاهر می‌شود:

$$U=\frac{۳}{۴}E=mgh=۰/۵\times۱۰\times۱۲=۶۰\,J\Rightarrow E=۸۰\,J$$

(فصل ۳ - صفحات ۶۸، ۶۹، ۸۰، ۸۱)

**۳۳. گزینه ۲ درست است.**

$$m_۳gh-\frac{۱}{۲}(m_۱+m_۲)v^{۲}\times\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۲}(m_۱+m_۲+m_۳)v^{۲}$$

$$m_۳(۱۰\times۰/۵)-\frac{۱}{۱۰}(۵)(۲)^{۲}=\frac{۱}{۲}(۵+m_۳)(۲)^{۲}$$

$$۵m_۳-۲=۱۰+۲m_۳$$

$$۳m_۳=۱۲\rightarrow m_۳=۴kg$$

(فصل ۳ - صفحات ۶۸، ۶۹، ۸۰، ۸۱)

**۳۴. گزینه ۱ درست است.**

گام اول: با استفاده از رابطهٔ بین درجه سلسیوس و فارنهایت داریم:

$$\theta=۱۰F-۱۴\xrightarrow{F=\frac{۹}{۵}\theta+۳۲}\theta=۱۰(\frac{۹}{۵}\theta+۳۲)-۱۴\Rightarrow\theta=۱۸\theta+۳۲۰-۱۴$$

$$\Rightarrow-۱۷\theta=۳۰۶\Rightarrow\theta=-۱۸\,^{\circ}C$$

گام دوم: حال با استفاده از رابطهٔ بین درجه سلسیوس و کلوین داریم:

$$T=\theta+۲۷۳\xrightarrow{\theta=-۱۸\,^{\circ}C}T=-۱۸+۲۷۳=۲۵۵K$$

(فصل ۴ - صفحات ۸۴، ۸۵)

**۳۵. گزینه ۳ درست است.**

از رابطه انبساط طولی یعنی $\Delta L=\alpha L_۱\Delta T$ استفاده می‌کنیم و تغییر طول میله را حساب می‌کنیم:

$$\Delta L=۱۰^{-۵}\times۱\times۵۰۰=۵\times۱۰^{-۳}\,m\rightarrow\Delta L=۵\times۱۰^{-۳}\times۱۰^{۲}=۰/۵cm$$

چون انبساط میله از دو طرف به‌طور یکنواخت انجام می‌شود فاصله میله به‌اندازهٔ نصف $۰/۵cm$ یعنی $\frac{۰/۵}{۲}=۰/۲۵$ از دیوار کم می‌شود و برابر $۱-۰/۲۵=۰/۷۵cm$ خواهد شد.

(فصل ۴ - صفحات ۸۸، ۸۹)

**۳۶. گزینه ۳ درست است.**

با توجه به رابطه $L_۲=L_۱+L_۱\alpha\Delta\theta$، شیب نمودار برابر $L_۱\alpha$ بوده و لذا چون طول اولیه B، $\frac{۱}{۲}$ برابر A است، لازمهٔ موازی بودن دو نمودار آن است که ضریب انبساط طولی B، ۲ برابر ضریب انبساط طولی A باشد. $(\alpha_B=۲\alpha_A)$ اینک در روابط درصد افزایش حجم و مساحت جایگذاری می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{درصد افزایش حجم } \circ/\circ۴=۳\alpha_A\times۴\circ\times۱\circ\circ\\ \text{درصد افزایش مساحت } ۲(۲\alpha_A)\times۶\circ\times۱\circ\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تقسیم روابط و ساده‌سازی}: \frac{\circ/\circ۴}{?}=\frac{۳\times۴\circ}{۴\times۶\circ}$$

$$\Rightarrow ?=\text{درصد افزایش مساحت}=\circ/\circ۸$$

(فصل ۴ - صفحات ۹۱ ، ۹۲)

**۳۷. گزینه ۳ درست است.**

با نوشتن رابطه انبساط ظاهری $\Delta V = V_۱(\beta_{\text{مایع}}-\beta_{\text{ظرف}})\Delta T$ می‌توان ضریب انبساط حجمی ظرف را به‌دست آورد و سپس ضریب انبساط خطی را محاسبه کرد.

لازم به توضیح است که می‌توان در رابطه فوق به جای $\beta$ ظرف از $(\beta=۳\alpha)۳\alpha$ استفاده کرد و مستقیماً $\alpha$ را محاسبه کرد.

$$\Delta V = V_۱(\beta_{\text{مایع}}-\beta_{\text{ظرف}})\Delta T$$

$$۱۸/۵ = ۲\times۱\circ^{۳}\,(۲\times۱\circ^{-۴}-۳\alpha)(۵\circ)$$

$$\alpha=\frac{۱}{۲}\times۱\circ^{-۵}\,\frac{۱}{k}=۵\times۱\circ^{-۶}\,\frac{۱}{k}$$

(فصل ۴ - صفحات ۹۳ ، ۹۴)

**۳۸. گزینه ۱ درست است.**

مطابق با طرح واژهٔ شکل مقابل داریم:

$$\text{کرهٔ فلزی}\begin{cases}m_۱=m\\ \theta_۱=۷۶\,^\circ C\end{cases}\qquad \text{آب}\begin{cases}m_۲=۸m\\ \theta_۱=۱\circ\,^\circ C\end{cases}$$

$$\frac{c_۱}{c_۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow c_۲=۴c_۱$$

کره فلز $\xrightarrow{Q_۱}\theta_e$ کره فلزی

$\theta e$ آب $\xleftarrow{Q_۲}۱\circ\,^\circ C$ آب

$$Q_۱+Q_۲=\circ\Rightarrow m_۱c_۱\Delta\theta_۱+m_۲c_۲\Delta\theta_۲=\circ$$

$$m_۱c_۱(\theta_e-۷۶)+۸mc_۲(\theta_e-۱\circ)=\circ\xrightarrow{c_۲=۴c_۱}mc_۱(\theta_e-۷۶)+۸m\times۴c_۱(\theta_e-۱\circ)=\circ$$

$$\Rightarrow mc_۱\theta_e-۷۶mc_۱+۳۲mc_۱\theta-۳۲\circ mc_۱=\circ\Rightarrow ۳۳mc_۱\theta_e-۳۹۶mc_۱=\circ$$

$$mc_۱(۳۳\theta_e-۳۹۶)=\circ\Rightarrow ۳۳\theta_e-۳۹۶=\circ\Rightarrow\theta_e=۱۲\,^\circ C$$

(فصل ۴ - صفحات ۹۷ ، ۹۸)

**۳۹. گزینه ۴ درست است.**

هنگامی که چند جسم با دمای مختلف در تبادل گرمایی با یکدیگر قرار دارند و به دمای نهایی یا دمای تعادل می‌رسند، می‌توان نوشت:

$$Q_۱+Q_۲+\ldots=\circ$$

با توجه به اینکه در این سؤال تعادل دمایی بدون تغییر حالت است و فقط تغییر دما داریم، می‌توان نوشت:

$$\theta_e=\frac{m_۱c_۱\theta_۱+m_۲c_۲\theta_۲+m_۳c_۳\theta_۳}{m_۱c_۱+m_۲c_۲+m_۳c_۳}$$

$$۲۵=\frac{\circ/۶c_۱\times۱\circ\circ+\circ/۲\times۹\circ\circ\times۲\circ+\circ/۵\times۴۲\circ\circ\times۲\circ}{\circ/۶c_۱+\circ/۲\times۹\circ\circ+\circ/۵\times۴۲\circ\circ}$$

$$۵۷\circ\circ\circ=۴۵c_۱+۴۵۶\circ\circ$$

$$c_۱=۲۵۳/۳\,\frac{J}{kg\,k}$$

(فصل ۴ - صفحات ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲)

**۴۰. گزینه ۴ درست است.**

$$\Delta F = ۱/۸\Delta\theta = ۵۴ \Rightarrow \Delta\theta = ۳۰^\circ C$$

این یعنی گرمای حاصل از $۳۰^\circ C$ کاهش دمای آب قادر است یخ را به دمای صفر درجه سلسیوس رسانده و تمام یخ را ذوب کند. به کمک این نکته، نسبت جرم آب به یخ را تعیین می‌کنیم:

$$m_۱ c_{\text{یخ}} \times ۲۰ + m_۱ \overset{۸۰}{L_F} = m_۲ \times c_{\text{آب}} \times ۳۰$$
$$۱۰ m_۱ + ۸۰ m_۱ = ۳۰ m_۲ \Rightarrow \boxed{m_۲ = ۳ m_۱}$$

اینک کافی است دمای تعادل $m_۱$ گرم آب $۰^\circ C$ را با $m_۲$ گرم آب $۴۰^\circ C$ تعیین کنیم:

$$m_۱ c \times (\theta_t - ۰) + m_۲ c \times (\theta_t - ۴۰) = ۰$$
$$\theta_t + ۳\theta_t - ۱۲۰ = ۰$$
$$۴\theta_t - ۱۲۰ = ۰ \Rightarrow \theta_t = ۳۰^\circ C$$

(فصل ۴- صفحات ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲)

**۴۱. گزینه ۲ درست است.**

گام اول: چون در صورت سؤال به مقدار آب یا یخ موجود در حالت تعادل اشاره نکرده است دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر همه یخ به آب $۰^\circ C$ تبدیل شود داریم:

$$۵۰^\circ_{\text{آب}} \xrightarrow{Q_۱} ۰^\circ C_{\text{آب}} \quad \text{و} \quad ۰^\circ C_{\text{آب}} \xleftarrow{Q_۱} ۰^\circ C_{\text{یخ}} \xleftarrow{Q_۳} -۲۰^\circ C_{\text{یخ}}$$
$$Q_۱ + Q_۲ + Q_۳ = ۰ \rightarrow m \times ۴۲۰۰ \times (۰ - ۵۰) + ۲۰۰ \times ۲۱۰۰\big(۰ - (-۲۰)\big) + ۲۰۰ \times ۳۳۶۰۰۰ \rightarrow m = ۳۶۰ g$$

گام دوم؛ حالت دوم: اگر همهٔ آب به یخ صفر درجه تبدیل شود داریم:

$$۵۰^\circ_{\text{آب}} \xrightarrow{Q'_۱} ۰^\circ C_{\text{آب}} \xrightarrow{Q'_۲} ۰^\circ C_{\text{یخ}} \quad \text{و} \quad ۰^\circ C_{\text{یخ}} \xleftarrow{Q'_۳} -۲۰^\circ_{\text{یخ}}$$
$$Q'_۱ + Q'_۲ + Q'_۳ = ۰ \rightarrow m' \times ۴۲۰۰ \times (۰ - ۵۰) + (-m' \times ۳۳۶۰۰۰) + ۲۰۰ \times ۲۱۰۰ \times (۰ - (-۲۰)) = ۰$$
$$m'(-۴۲۰۰ \times ۵۰ - ۳۳۶۰۰۰) = -۲۰۰ \times ۲۱۰۰ \times ۲۰$$
$$۱۳۰ m' = ۲۰۰۰ \rightarrow m' = \frac{۲۰۰}{۱۳} = ۱۵/۳ g$$

گام سوم: پس نتیجه می‌گیریم اگر جرم آب در محدودهٔ $۱۵/۳ \le m \le ۳۶۰$ گرم باشد، دمای مجموعه برابر $۰^\circ C$ است و فقط گزینه ۲ می‌تواند درست باشد.

**۴۲. گزینه ۱ درست است.**

دو مورد «ب» و «ث» درست هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

الف) چگالی شاره‌ها بر اثر افزایش دما، بر اساس رابطه $\rho = \rho_۰(۱ - \beta\Delta T)$ کاهش می‌یابد. بنابراین این عبارت نادرست است.

پ) رسانش گرمایی در اجسامی مانند شیشه، چوب و ... به‌دلیل ارتعاش اتم‌ها و گسترش این ارتعاش در طول آن‌ها است و به جهت نبود الکترون‌های آزاد، این اجسام رساناهای گرمایی خوبی نیستند. این عبارت هم نادرست است.

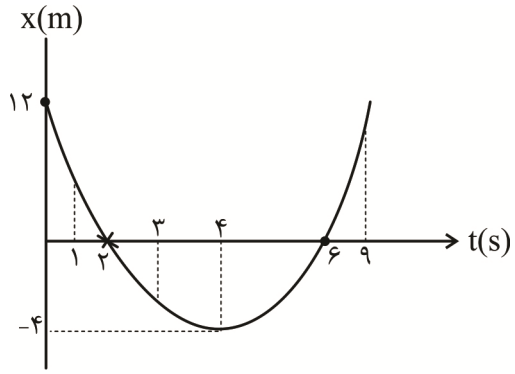
ت) این عبارت نیز نادرست است. زیرا دستگاه گردش خون مثال عینی از انتقال گرما به روش همرفت واداشته است که قلب همچون تلمبه‌ای باعث همرفت واداشته خون می‌شود.

(فصل ۴ - صفحات ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳)

**۴۳. گزینه ۳ درست است.**

ابتدا نمودار x-t این متحرک را رسم می‌کنیم:

$$x = t^۲ - ۸t + ۱۲ \Rightarrow x = (t-۲)(t-۶)$$




می‌دانیم شتاب حرکت متحرک مثبت است:

$$\frac{۱}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲}$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) متحرک در لحظهٔ $t = ۴s$ متوقف و تغییر جهت داده است. (درست)

۲) در لحظهٔ $t = ۱s$، چون $a > ۰$ و $v < ۰$ است پس حرکت متحرک کندشونده است. (درست)

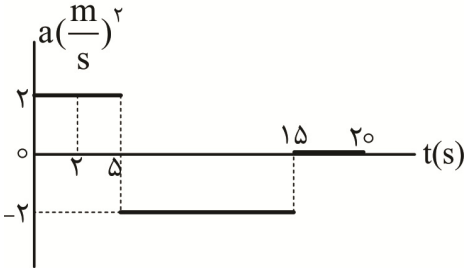
۳) در لحظهٔ $t = ۳s$ چون $a > ۰$ و $v < ۰$ حرکت متحرک کندشونده و در حال دور شدن از مبدأ است. (نادرست)

۴) در لحظهٔ $t = ۹s$، حرکت متحرک به‌دلیل $a > ۰$ و $v > ۰$ تندشونده و در حال دور شدن از مبدأ است. (درست)

(فصل ۱- صفحات ۱۷ ، ۱۸)

**۴۴. گزینه ۴ درست است.**

گام اول: حرکت جسم در سه مرحله انجام شده است و برای مرحله اول در بازهٔ $t_۱ = ۲s$ تا $t_۲ = ۵s$ از رابطه $v_۲ = at + v_۱$ سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۵s$ را حساب می‌کنیم: $v_۲ = ۲\times(۵-۲) + (-۴) = ۲\frac{m}{s}$




چون شتاب ثابت است جابه‌جایی جسم را از رابطه $\Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}\times t$ حساب می‌کنیم: $\Delta x_۱ = \frac{۲ + (-۴)}{۲}\times ۳ = -۳m$

گام دوم: در بازهٔ $t_۲ = ۵s$ تا $t_۳ = ۱۵s$، شتاب جسم $-۲\frac{m}{s^۲}$ است؛ سرعت اولیه این بازه $۲\frac{m}{s}$ و سرعت جسم را در لحظهٔ $t = ۱۵s$ حساب می‌کنیم: $v_۳ = -۲\times(۱۵-۵) + ۲ = -۱۸\frac{m}{s}$

جابه‌جایی جسم را در این بازه حساب می‌کنیم: $\Delta x_۲ = \frac{۲ + (-۱۸)}{۲}\times ۱۰ = -۸۰m$

گام سوم: از رابطه $\Delta x = vt$ برای بازهٔ $t_۳ = ۱۵s$ تا $t_۴ = ۱۸s$ استفاده می‌کنیم و جابه‌جایی متحرک را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_۳ = -۱۸\times(۱۸-۱۵) = -۵۴m$$

گام چهارم: اکنون جابه‌جایی کل را حساب می‌کنیم: $\Delta x = -۳ + (-۸۰) + (-۵۴) = -۱۳۷m$

(فصل ۱- صفحات ۲۰ ، ۲۱)

**۴۵. گزینه ۲ درست است.**

گام اول: با استفاده از معادله مکان- زمان، سرعت اولیه و شتاب را محاسبه می‌کنیم:

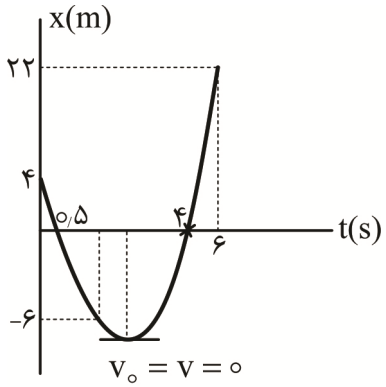
$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \rightarrow \begin{cases} -۶ = \frac{۱}{۲}a(۲)^۲ + v_۰(۲) + ۴ \\ ۲۲ = \frac{۱}{۲}a(۶)^۲ + v_۰(۶) + ۴ \end{cases} \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲}\ ,\ v_۰ = -۹\frac{m}{s}$$

گام دوم: معادله حرکت را می‌نویسیم و لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان عبور کرده است را به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow[v_0=-9\frac{m}{s}]{a=4\frac{m}{s^2}} x=2t^2-9t+4$$

$$2t^2-9t+4=0 \Rightarrow t_1=0/5s \ , \ t_2=4s$$

زمان‌هایی که متحرک به مبدأ مکان می‌رسد.




گام سوم: متحرک با شتاب ثابت در حرکت است و برای تعیین سرعت متوسط می‌توان از رابطه $\overline{v}=\frac{v+v_0}{2}$ استفاده کرد. در بازه زمانی خواسته‌شده $v_0=v$ اکسترمم $=0$ است و باید سرعت در لحظه رسیدن متحرک به مبدأ مکان را حساب کنیم. از رابطه $v=at+v_0$ استفاده می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=4t \xrightarrow{t=4s} v=16\frac{m}{s}$$

$$\overline{v}=\frac{v+v_0}{2}=8\frac{m}{s}$$

(فصل ۱ - صفحات ۱۸ تا ۲۱)

**۴۶. گزینه ۴ درست است.**

جابه‌جایی گلوله اول تا رسیدن به نطقه B برابر $45m$ و تا رسیدن به زمین $125m$ است.

$$|\Delta y|=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \begin{cases} 45=\frac{1}{2}\times 10\times t^2 \Rightarrow t=3s \\ 125=\frac{1}{2}\times 10\times t^2 \Rightarrow t_0=5s \end{cases}$$

متحرک دوم تنها به‌مدت ۲ ثانیه حرکت می‌کند.

$$|\Delta y|=\frac{1}{2}\times 10\times (2)^2=20m$$

پس در مدتی که متحرک اول، ۸۰ متر از نقطه B پایین‌تر می‌رود، متحرک دوم تنها ۲۰ متر سقوط کرده و تا این لحظه فاصله دو متحرک به ۶۰ متر می‌رسد.

(فصل ۱- صفحات ۲۲ ، ۲۳)

**۴۷. گزینه ۲ درست است.**

ابتدا متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند پس $a=0$ است. بنابراین:

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0 \Rightarrow \vec{F}_1+\vec{F}_2=-\vec{F}_3$$

در یک لحظه اندازه نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$، $\frac{1}{5}$ برابر و نیروی $\vec{F}_3$ قرینه و اندازه آن ۷۵ درصد کاهش می‌یابد یعنی $\vec{F}_3$ با برایند $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ (که برابر $-\vec{F}_3=20N$ است هم‌جهت می‌شود و درنتیجه:

$$F_3'=F_3-\frac{75}{100}F_3=\frac{25}{100}F_3=\frac{1}{4}F_3=\frac{1}{4}\times 20=5N$$

همچنین اندازه نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ ، $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود پس:

$$\vec{F}_{net}=\vec{F}_1'+\vec{F}_2'+\vec{F}_3'=\frac{1}{2}\vec{F}_1+\frac{1}{2}\vec{F}_2+5$$

$$= \frac{۱}{۲}\underbrace{(\vec{F}_۱ + \vec{F}_۲)}_{\vec{F}_۳} + ۵ \Rightarrow \vec{F}_{net} = \frac{۱}{۵}(۲۰) + ۵ = ۹N$$

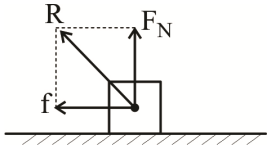
$$F_{net} = ma \Rightarrow ۹ = ۲a \Rightarrow a = \frac{۹}{۲}$$

(فصل ۲- صفحات ۳۲، ۳۳، ۳۴)

**۴۸. گزینه ۲ درست است.**

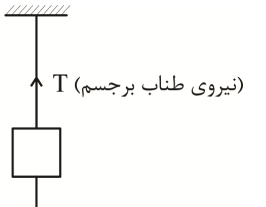
بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست است؛ زیرا نیروهایی که پرنده و هواپیما بر هم وارد می‌کنند؛ کنش و واکنش یکدیگرند و هم‌اندازه‌اند.




ب) نادرست است؛ زیرا دونده با پاهای خود بر سطح زمین نیرو وارد می‌کند و سطح زمین بر دونده به طرف جلو واکنش این نیرو را وارد می‌کند و دونده به جلو حرکت می‌کند.

پ) درست است؛ مطابق شکل $R$ نیروی سطح بر جسم است و واکنش این نیرو از جسم بر سطح و به‌صورت ↘ است.




ت) نادرست است؛ مطابق شکل نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده‌ایم و واکنش نیروی زمین بر جسم، بر زمین وارد می‌شود اما واکنش نیروی طناب بر جسم، بر طناب وارد می‌شود.

ث) درست است؛ نیروهای شخص بر جعبه و جعبه بر شخص هم‌اندازه‌اند و چون اصطکاک ناچیز است داریم:

$$\underbrace{m_۱a_۱}_{\text{شخص}} = \underbrace{m_۲a_۲}_{\text{جعبه}} \rightarrow \frac{a_۱}{a_۲} = \frac{m_۲}{m_۱} = \frac{۱۰m}{m} = ۱۰$$

از رابطه $\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta x_۱}{\Delta x_۲} = \frac{a_۱}{a_۲} \xrightarrow{\Delta x_۲ = ۱۰cm} = \frac{\Delta x_۱}{۱۰} = ۱۰ \rightarrow \Delta x_۱ = ۱۰۰cm$$

چون جعبه $۱۰cm$ و شخص $۱۰۰cm$ به طرف هم حرکت می‌کنند، فاصله آن‌ها $۱۱۰cm$ کم می‌شود.

**۴۹. گزینه ۴ درست است.**

وزن جسم $A$، در سطح مریخ چهار برابر وزن جسم $B$ در ماه است؛ پس:

$$(W_A)_{\text{مریخ}} = ۴(W_B)_{\text{ماه}} \Rightarrow m_A g_{\text{مریخ}} = ۴m_B g_{\text{ماه}}$$

$$\Rightarrow m_A \times ۳/۶ = ۴ \times m_B \times ۱/۶ \Rightarrow m_B = \frac{۹}{۱۶}m_A \quad (I)$$

درس سطح زمین، وزن جسم $A$، ۷۰ نیوتن بیشتر از وزن جسم $B$ است؛ پس:

$$(W_A)_{\text{زمین}} - (W_B)_{\text{زمین}} = ۷۰ \Rightarrow m_A g_{\text{زمین}} - m_B g_{\text{زمین}} = ۷۰$$

$$\Rightarrow ۱۰m_A - ۱۰m_B = ۷۰ \Rightarrow m_A - m_B = ۷ \xrightarrow{(I)} m_A - \frac{۹}{۱۶}m_A = ۷$$

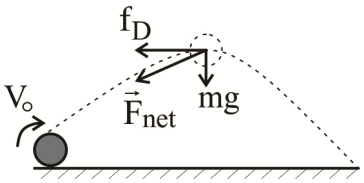
$$\Rightarrow \frac{۷}{۱۶}m_A = ۷ \Rightarrow m_A = ۱۶kg$$

$$m_B = \frac{۹}{۱۶}m_A = \frac{۹}{۱۶} \times ۱۶ = ۹kg$$

**۵۰. گزینه ۴ درست است.**

گام اول: در بالاترین نقطه از مسیر حرکت سرعت جسم افقی است و نیروی مقاومت هوا $(f_D)$ خلاف جهت حرکت توپ و به سمت چپ است. در نتیجه $f_D$ بر وزن جسم $(mg)$ عمود است.

برای محاسبه نیروی خالص وارد بر توپ در بالاترین نقطه از مسیر حرکت چنین می‌توان نوشت:

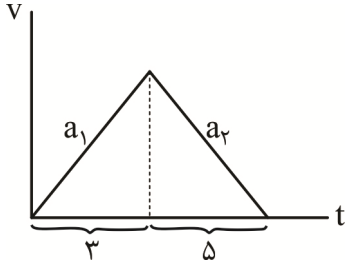



$$F_{net} = \sqrt{f_D^2 + (mg)^2}$$
$$F_{net} = \sqrt{(8)^2 + (0/6 \times 10)^2}$$
$$F_{net} = ma \xrightarrow{F_{net}=10, m=0/6} a = \frac{100}{6} = 16/6 \frac{m}{s^2}$$

گام دوم: جهت شتاب با جهت نیروی خالص وارد بر جسم $(F_{net})$ برابر است. بنابراین جهت شتاب به صورت $(\swarrow)$ است.

**۵۱. گزینه ۱ درست است.**

نمودار سرعت - زمان این آسانسور به‌صورت زیر است. از آنجا که یک تغییر سرعت معین در قسمت دوم حرکت، $\frac{5}{3}$ برابر قسمت اول طول کشیده است، شیب نمودار یا همان اندازهٔ شتاب در قسمت دوم، $\frac{3}{5}$ قسمت اول است.




$$\Rightarrow a_2 = \frac{3}{5} a_1 = 1/2 \frac{m}{s^2}$$

در قسمت دوم حرکت با حرکتی کندشونده رو به بالا مواجه هستیم که این یعنی در قسمت دوم حرکت، جهت شتاب رو به پایین است.

در قسمت اول : $N_1 - mg = ma_1 \Rightarrow N_1 = mg + ma_1$

در قسمت دوم : $mg - N_2 = ma_2 \Rightarrow N_2 = mg - ma_2$

تفاضل روابط : $N_1 - N_2 = ma_1 + ma_2$

$$\Delta N = 80(2 + 1/2) = 256N$$

توجه کنید پاسخ به مقدار g وابسته نیست.

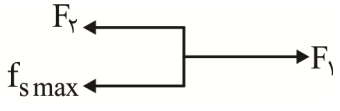
**۵۲. گزینه ۲ درست است.**

از حالت اول، جسم در آستانه حرکت به طرف راست بوده و نیروی اصطکاک سکونی بیشینه به طرف چپ به جسم اثر می‌کند.

در حالت دوم جسم در آستانه حرکت به طرف چپ بوده و نیروی اصطکاک سکونی بیشینه به طرف راست به جسم اثر می‌کند.

در حالت اول:

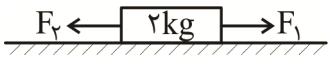
$$F_1 = F_2 + f_{s_{max}} \Rightarrow F_2 = F_1 - f_{s_{max}}$$




در حالت دوم:

$$F_2' = F_1 + f_{s_{max}}$$

تفاضل روابط: $F_2' - F_2 = 2f_{s_{max}} = 12N$

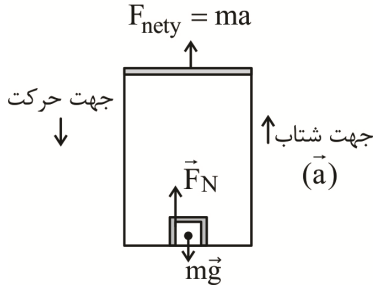



(بررسی راستای قائم: $F_N = mg = 20\,N$)

$$\Rightarrow 2\mu_s F_N = 12 \Rightarrow 2\mu_s \times 20 = 12 \Rightarrow \mu_s = 0/3$$

**۵۳. گزینه ۱ درست است.**

گام اول: جهت حرکت آسانسور به سمت پایین و حرکت کندشونده است. بنابراین شتاب به سمت بالا (جهت بالا را نسبت در نظر می‌گیریم.) است. با استفاده از رابطه $v = at + v_\circ$ شتاب حرکت آسانسور در مدت ۵s را محاسبه می‌کنیم.




$$v = at + v_\circ \xrightarrow[v=۲\frac{N}{s},\ t=۴s]{v_\circ=-۱۰\frac{m}{s}} -۲ = a(۴) - ۱۰ \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲}$$

گام دوم: با استفاده از قانون دوم نیوتن نیروی عمودی سطح را به‌دست می‌آوریم:

$$F_N - mg = ma$$
$$F_N = m(g+a) = ۱۲(۱۰+۲) = ۱۴۴N$$

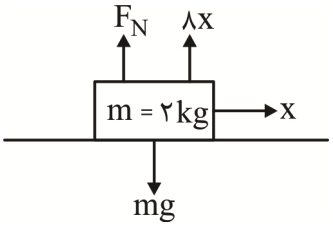
مرحله دوم حرکت:

$$mg - F_N = ma$$
$$F_N = m(g-a) \xrightarrow{a=g} F_N = \circ$$

در اصطلاح در این حالت می‌گویند جسم در حالت بی‌وزنی است.

**۵۴. گزینه ۳ درست است.**

برای این که جسم بتواند حرکت افقی کند، باید $F > f_{s_{max}}$ باشد، پس ابتدا نیروی عمودی تکیه‌گاه را می‌یابیم:




$$F_{net_y} = \circ \Rightarrow F_N - mg + ۸x = \circ \Rightarrow F_N = mg - ۸x$$
$$f_{s_{max}} = \mu_s F_N = \mu_s(mg - ۸x)$$

برای اینکه جسم حرکت افقی کند، باید $x > f_{s_{max}}$ باشد؛ پس:

$$x > f_{s_{max}} \Rightarrow x > \mu_s(mg - ۸x) \Rightarrow \frac{x}{mg-۸x} > \mu_s \Rightarrow \frac{mg-۸x}{x} < \frac{۱}{\mu_s}$$

$$\xrightarrow[m=۲kg]{\mu_s=\circ/۵} \frac{۲\circ - ۸x}{x} < \frac{۱}{\mu_s} \Rightarrow \frac{۲\circ}{x} - \frac{۸x}{x} < \frac{۱}{\circ/۵} \Rightarrow \frac{۲\circ}{x} - ۸ < ۲ \Rightarrow \frac{۲\circ}{x} < ۱\circ \Rightarrow x > ۲N$$

همچنین باید نیروی $۸x$ کمتر از $mg$ باشد چون حرکت افقی تبدیل به عمودی نشود؛ پس:

$$۸x < mg \Rightarrow ۸x < ۲\circ \Rightarrow x < ۲/۵N$$

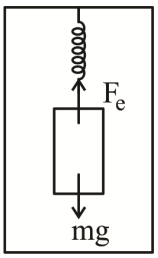
پس:

$$۲N < x < ۲/۵N$$

**۵۵. گزینه ۳ درست است.**

بر جسم دو نیرو وارد می‌شود یکی نیروی فنر $(F_e)$ و دیگری نیروی وزن.

نیروی فنر را از رابطه $F_e = kx$ حساب می‌کنیم:




$$F_E = ۱(\underbrace{\frac{N}{cm}}_{k}) \times \underbrace{(۳۴ - ۳\circ)}_{x} = ۴N$$

نیروی وزن جسم برابر $W = \circ/۵ \times ۱\circ = ۵N$ است. چون نیروی وزن بیشتر از نیروی فنر است می‌توان نتیجه گرفت شتاب جسم و آسانسور و به پایین است در این صورت حرکت آسانسور به طرف بالا و کندشونده خواهد بود و مقدار شتاب را با استفاده از قانون دوم نیوتن حساب می‌کنیم:

$$F_{net} = ma \rightarrow mg - kx = ma \rightarrow ۵ - ۴ = \circ/۵a$$
$$a = ۲\frac{m}{s^۲}$$

دقت کنید که در عبارت «الف» فقط به مقدار شتاب و جهت حرکت اشاره شده است و اینکه حرکت تندشونده یا کندشونده باشد مشخص شده است پس الزاماً نمی‌تواند درست باشد.

## شیمی

**۵۶. گزینه ۱ درست است.**

جدول صفحه ۸۷ کتاب درسی مقدار این یون‌ها را نوشته است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) نادرست است؛ برای شناسایی یون باریم باید از سدیم‌سولفات استفاده کرد زیرا $Ba^{2+}$ و $SO_4^{2-}$ با یکدیگر رسوب سفیدرنگ باریم‌سولفات $(BaSO_4)$ تولید می‌کنند.

۳) نادرست است؛ زیرا آب چشمه و قنات خالص نیست.

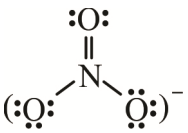
۴) نادرست است.

$$2Na_3PO_4(aq) + 3CaCl_2(aq) \rightarrow Ca_3(PO_4)_2(s) + 6NaCl(aq)$$

با گذشت زمان غلظت یون $PO_4^{3-}$ کم می‌شود چون رسوب می‌کند اما غلظت یون $Cl^-$ ثابت مانده است. (فصل ۳ - ص ۸۵، ۸۶)

**۵۷. گزینه ۱ درست است.**

یون نیترات $(NO_3^-)$ دارای ۴ جفت الکترون پیوندی و ۸ جفت الکترون ناپیوندی است:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) نادرست است؛ زیرا نام $FeSO_4$، آهن (II) سولفات است.

۳) نادرست است؛ زیرا این نسبت در یون کربنات ۲ است.

۴) نادرست است؛ زیرا این نسبت در یون فسفات ۳ است.

| یون | نیترات $(NO_3^-)$ | کربنات $(CO_3^{2-})$ | سولفات $(SO_4^{2-})$ | فسفات $(PO_4^{3-})$ |
|---|---|---|---|---|
| جفت الکترون‌های پیوندی | ۴ | ۴ | ۴ | ۴ |
| جفت الکترون‌های ناپیوندی | ۸ | ۸ | ۱۲ | ۱۲ |

(فصل ۳- صفحات ۸۷، ۸۸)

**۵۸. گزینه ۳ درست است.**

یون کربنات ۳ اتم اکسیژن دارد و بار الکتریکی یون فسفات -۳ است. پس فرمول شیمیایی یون بورات به‌صورت $BO_3^{3-}$ است و فرمول شیمیایی سدیم‌بورات، $Na_3BO_3$ است.

$$\text{جرم مولی سدیم بورات} = (23\times3) + 10 + (16\times3) = 127 g.mol^{-1}$$

(فصل ۳ - صفحات ۸۹، ۹۲)

**۵۹. گزینه ۲ درست است.**

عبارت اول: درست است. حلال جزئی از محلول است که نسبت به حل‌شونده مول بیشتری دارد. بیشترین شمار ذرات در هوای پاک و خشک مربوط به گاز نیتروژن و بیشترین شمار ذرات در سرم، مولکول‌های آب است.

عبارت دوم: درست است. با تغییر ماهیت حلال و حل‌شونده، ویژگی‌های محلول تغییر می‌کند و با تغییر غلظت و دما هم ویژگی‌های محلول عوض می‌شود.

عبارت سوم نادرست است؛ زیرا محلول غلیظ؛ محلولی است که مقدار حل‌شوندهٔ آن نسبت به حلال زیاد است. اینجا مقدار حلال گفته نشده است. پس این گزینه الزاماً درست نیست.

عبارت چهارم درست است. هر چه مقدار نمک موجود در آب دریا بیشتر باشد چگالی آن بیشتر است. (فصل ۱- ص ۹۷)

**۶۰. گزینه ۴ درست است.**

هر ۴ کمیت هم‌ارز یکدیگر هستند و ppm یک محلول را نشان می‌دهند. (فصل ۳- ص ۹۸)

**۶۱. گزینه ۱ درست است.**

$$۴۰۰\text{ppm} = \frac{\text{g}\,\text{NaOH}}{۱۰۰۰\,\text{g}} \times ۱۰^{۶} \Rightarrow \text{g}\,\text{NaOH} = ۰/۴\text{g}$$

$$۰/۴\text{g}\,\text{NaOH} \times \frac{۱\,\text{mol}\,\text{NaOH}}{۴۰\,\text{g}\,\text{NaOH}} \times \frac{۱\,\text{mol}\,\text{Na}^{+}}{۱\,\text{mol}\,\text{NaOH}} \times \frac{۲۳\,\text{g}\,\text{Na}^{+}}{۱\,\text{mol}\,\text{Na}^{+}} = ۰/۲۳\text{g}\,\text{Na}^{+}$$

$$۴۶\text{ppm} = \frac{۰/۲۳\,\text{g}\,\text{Na}^{+}}{\text{x}} \times ۱۰^{۶}$$

جرم کل محلول جدید $= ۵\text{kg}$

جرم آب مورد نیاز $۵ - ۱ = ۴\text{kg}$

(فصل ۳ - ص ۹۷)

**۶۲. گزینه ۳ درست است.**

هر ۴ عبارت درست است.

عبارت اول:

$$۰/۹ = \frac{\text{x}}{۲۰۰\,\text{g}} \times ۱۰۰ \text{x} = ۱/۸\text{g}$$ جرم حل‌شونده

جرم آب $= ۲۰۰ - ۱/۸ = ۱۹۸/۲\text{g}$

عبارت دوم: هوا شامل نیتروژن، اکسیژن، کربن دی‌اکسید و ... است، که نیتروژن حلال و سایر گازها حل‌شونده هستند.

عبارت سوم:

آمونیوم فسفات $(NH_۴)_۳PO_۴ \Rightarrow$ شمار اتم‌ها $= ۲۰$

لیتیم نیترات $LiNO_۳ \Rightarrow$ شمار اتم‌ها $= ۵$

عبارت چهارم:

$$\text{درصد جرمی محلول} = \text{ppm} \times ۱۰^{-۴} = ۱۹۰۰۰ \times ۱۰^{-۴} = \%۱/۹$$

(فصل ۳ - ص ۹۰)

**۶۳. گزینه ۴ درست است.**

جرم حل‌شونده $(NaOH) = ۴ \times ۴۰ = ۱۶۰\,\text{g}$

جرم حلال (آب) $= ۵ \times ۱۸ = ۹۰\,\text{g}$

جرم محلول $= ۱۶۰ + ۹۰ = ۲۵۰\,\text{g}$

$$\text{درصد جرمی}\ NaOH = \frac{\text{g}\,\text{NaOH}}{\text{g محلول}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۶۰}{۲۵۰} \times ۱۰۰ = \%۶۴$$

$$\text{مولاریته محلول}\ \text{M} = \frac{۱۰\,\text{ad}}{\text{M}} = \frac{۱۰ \times ۶۴ \times ۱/۲۵}{۴۰} = ۲۰\,\text{mol.L}^{-۱}$$

(فصل ۳- ص ۹۵)

**۶۴. گزینه ۲ درست است.**

ابتدا حساب می‌کنیم ۸ گرم $CuO$ به چند گرم $H_۲SO_۴$ نیاز دارد. $(CuO = ۸۰\,\text{gmol}^{-۱})$

$$۸\text{g}\,\text{CuO} \times \frac{۱\,\text{mol}\,\text{CuO}}{۸۰\,\text{g}\,\text{CuO}} \times \frac{۱\,\text{mol}\,H_۲SO_۴}{۱\,\text{mol}\,\text{CuO}} \times \frac{۹۸\,\text{g}\,H_۲SO_۴}{۱\,\text{mol}\,H_۲SO_۴} = ۹/۸\text{g}\,H_۲SO_۴$$

سپس جرم محلول $H_۲SO_۴$ را حساب می‌کنیم:

$$۲۰ = \frac{۹/۸\,H_۲SO_۴}{\text{x}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \text{x} = ۴۹\text{g}$$ محلول

اکنون می‌توان جرم آب اولیهٔ موجود در محلول $H_2SO_4$ را به‌دست آورد:

$$\text{جرم آب} = ۴۹ - ۹/۸ = ۳۹/۲ g H_2O$$

در مرحلهٔ آخر جرم آب تولیدشده در واکنش را حساب می‌کنیم و با جرم آب اولیه جمع می‌کنیم:

$$۸ g CuO \times \frac{۱ mol CuO}{۸۰ g CuO} \times \frac{۱ mol H_2O}{۱ mol CuO} \times \frac{۱۸ g H_2O}{۱ mol H_2O} = ۱/۸ g H_2O$$

$$\text{جرم آب موجود در ظرف} = ۳۹/۲ + ۱/۸ = ۴۱ g$$

(فصل ۳- ص ۹۶)

**۶۵. گزینه ۴ درست است.**

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست است؛ زیرا استخراج منیزیم از آب دریا یکی از روش‌های تهیهٔ منیزیم است.

۲) نادرست است؛ زیرا نیمی از سدیم‌کلرید استخراج شده در صنعت برای تهیهٔ $NaOH$، فلز سدیم، گاز کلر، گاز هیدروژن و ... است.

۳) نادرست است؛ زیرا تهیهٔ فلز منیزیم از آب دریا یک فرآیند شیمیایی است.

۴) درست است؛ زیرا تبلور یک فرآیند فیزیکی است. (فصل ۳ - ص ۹۸)

**۶۶. گزینه ۱ درست است.**

الف) نادرست است؛ زیرا متداول‌ترین روش بیان غلظت در شیمی، غلظت مولار است.

ب) درست است؛ اگر حجم محلول ثابت باشد با افزودن حل‌شونده، غلظت محلول افزایش می‌یابد.

پ) نادرست است:

$$۲۵۰ mL \times \frac{۱ L}{۱۰^۳ mL} \times \frac{۰/۲ mol}{۱ L} = ۰/۰۵ mol$$

ت) نادرست است؛ اگر مول‌های حل‌شونده‌ها یکسان و حجم محلول‌ها برابر باشد، غلظت مولار محلول‌ها برابر می‌شود.

(فصل ۳- ص ۹۸، ۹۹)

**۶۷. گزینه ۳ درست است.**

نخست معادلهٔ واکنش را به روش x موازنه کنید. چون نسبت حجمی $NO_2$ به $NO$ برابر ۳ به ۴ است پس ضریب این گازها به‌ترتیب ۳ و ۴ است:

$$Al + HNO_3 \rightarrow Al(NO_3)_3 + ۳NO_2 + ۴NO + H_2O$$

اکنون ضریب $Al$ را x در نظر بگیرید و ضریب بقیه مواد را نسبت به x حساب کنید و با مساوی قرار دادن اکسیژن دو طرف، مقدار x را به‌دست آورید:

$$xAl + (۳x+۷)HNO_3 \rightarrow xAl(NO_3)_3 + ۳NO_2 + ۴NO + \frac{۳x+۷}{۲} H_2O$$

$$\text{تعداد اکسیژن دو طرف} = ۹x + ۲۱ = ۹x + ۶ + ۴ = \frac{۳x+۷}{۲} \rightarrow x = ۵$$

$$۵Al + ۲۲HNO_3 \rightarrow ۵Al(NO_3)_3 + ۳NO_2 + ۴NO + ۱۱H_2O$$

$$۶۷/۵ g Al \times \frac{۱ mol Al}{۲۷ g Al} \times \frac{۲۲ mol HNO_3}{۵ mol Al} \times \frac{۱ Lit HNO_3}{۲/۵ mol HNO_3} = ۴/۴ Lit HNO_3$$

(فصل ۳ - ص ۱۰۰)

**۶۸. گزینه ۳ درست است.**

عبارت اول نادرست است. الزاماً این جمله درست نیست، چون جرم حلال داده نشده است.

عبارت دوم درست است. نمک‌های $AgCl, BaSO_4$ , $Ca_3(PO_4)_2$ انحلال‌پذیری کمتر از ۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب دارند، پس نامحلول هستند.

عبارت سوم نادرست است. نقاط بالای نمودار، محلول فرا سیرشده، روی نمودار، محلول سیرشده و زیر نمودار، محلول سیرنشده را نشان می‌دهند.

عبارت چهارم درست است. با توجه به ص ۱۰۰ کتاب درسی، نمودار انحلال‌پذیری $Li_2SO_4$ نزولی است؛ یعنی با افزایش دما

انحلال‌پذیری کاهش می‌یابد.

عبارت پنجم درست است. نوع نمک و دمای آب تغییر کند، انحلال‌پذیری نمک عوض می‌شود.

هرچه مادهٔ بیشتری در آب حل‌شده باشد، نمک کمتری در آب حل می‌شود و آب‌های اسیدی می‌توانند نمک $NaHCO_3$ بیشتری را در خود حل کنند. پس انحلال‌پذیری به pH آب هم بستگی دارد. (فصل ۳- ص ۱۰۰، ۱۰۱)

**۶۹. گزینه ۲ درست است.**

ابتدا معادلهٔ انحلال‌پذیری نمک را به‌دست آورید:

$$S = a\theta + S_0 \qquad a = \frac{S_2 - S_1}{\theta_2 - \theta_1} \quad \theta = 0 \quad S = S_0 = 72$$

$$a = \frac{80 - 72}{10 - 0} = 0/8 \qquad s = 0/8\theta + 72$$

جرم $NaNO_3$ حل‌شده $= 0/6 \times 85 = 51g$

اگر در $50g$ آب $51g$ سدیم‌نیترات حل شود، در $100g$ آب $102g$ نمک حل می‌شود.

$$102 = 0/8\theta + 72 \qquad \theta = \frac{30}{0/8} = 37/5\,^{\circ}C$$

(فصل ۳- ص ۱۰۲)

**۷۰. گزینه ۴ درست است.**

شیر یک کلوییید است و در کلوییدها ذرات پخش‌شونده توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) نادرست است؛ زیرا فرمول مولکولی اوره $CO(NH_2)_2$ است. نماد Co یعنی کبالت و $CO$ یعنی کربن و اکسیژن (ص ۶)

۲) نادرست است؛ زیرا وازلین $(C_{25}H_{52})$ یک مولکول ناقطبی است و بخش قطبی ندارد. (ص ۸)

۳) نادرست است؛ زیرا بخش آنیونی صابون $(RCOO^-)$ خودش یک قسمت آب‌دوست $(COO^-)$ دارد و یک قسمت آب‌گریز $(R)$. (ص ۹)

**۷۱. گزینه ۲ درست است.**

نمک‌های فسفات با یون‌های $Ca^{2+}$ و $Mg^{2+}$ موجود در آب سخت واکنش می‌دهند و آن‌ها را رسوب می‌دهند. (فصل ۱ - ص ۱۲)

**۷۲. گزینه ۳ درست است.**

الف) نادرست است؛ زیرا متانول $(CH_3OH)$ یک الکل است و به‌صورت مولکولی در آب حل می‌شود و اصلاً یون هیدروکسید $(OH^-)$ در آب تولید نمی‌کند.

ب) درست است.

$$Li_2O(s) + H_2O(l) \rightarrow 2Li^+(aq) + 2OH^-(aq)$$

$$BaO(s) + H_2O(l) \rightarrow Ba^{2+}(aq) + 2OH^-(aq)$$

پ) نادرست است؛ زیرا $N_2O_5$ در دمای اتاق گاز نیست، جامد است.

ت) درست است؛ محلول‌های آبی سدیم‌هیدروکسید و آمونیاک، باز هستند و رنگ کاغذ pH در محیط‌های بازی، آبی است.

(فصل ۱- ص ۱۶)

**۷۳. گزینه ۱ درست است.**

ابتدا درصد یونش را به درجه یونش تبدیل کنید و در رابطهٔ $[H^+] = M.\alpha$ قرار دهید:

$$M = \frac{1 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-4/3}} = 0/2 \times 10^{0/3} = 0/4 mol.L^{-1}$$

$$۰/۲\,\text{Lit}\times\frac{۰/۴\,\text{mol}}{۱\,\text{Lit}}\times\frac{۵۰\,\text{gHX}}{۱\,\text{mol HX}}=۴\,\text{gHX}$$

(فصل ۱- ص ۱۸)

**۷۴. گزینه ۱ درست است.**

با توجه به معادله یونش اسید ضعیف HX $\left(\text{HX(aq)}\rightleftharpoons \text{H}^+\text{(aq)}+\text{X}^-\text{(aq)}\right)$ و عبارت ثابت یونش اسید $(\text{Ka}=\frac{[\text{H}^+][\text{X}^-]}{[\text{HX}]})$ چون مقدار Ka ثابت است، با تغییر غلظت HX، غلظت یون‌های $\text{H}^+$ و $\text{X}^-$ به یک نسبت تغییر می‌کند، در نتیجه نسبت آن‌ها یعنی $\frac{[\text{H}^+]}{[\text{X}^-]}$ ثابت می‌ماند. (فصل ۱ - ص ۲۲)

**۷۵. گزینه ۴ درست است.**

ماده‌ای که رنگ کاغذ pH را سرخ کند یعنی اسید است و چون رسانایی آن کمتر از محلول NaCl است پس باید اسید ضعیف باشد یعنی HCOOH، HF و $\text{CH}_۳\text{COOH}$. (فصل ۱- ص ۲۳)

**۷۶. گزینه ۲ درست است.**

الف) درست است با رقیق کردن اسیدها، pH آن‌ها افزایش و با رقیق کردن بازها، pH آن‌ها کاهش می‌یابد.

ب) درست است. NaOH و KOH باز قوی هستند و بازها موادی خورنده محسوب می‌شوند.

پ) نادرست است؛ زیرا فقط با داشتن $\text{K}_\text{b}$ یا قدرت یک باز نمی‌توان به یقین دربارهٔ pH آن نظر داد. فقط در غلظت یکسان بین دو باز می‌توان گفت هر چه $\text{K}_\text{b}$ بزرگ‌تر، pH باز بزرگ‌تر است.

ت) درست است؛ pH محلول ۱ مولار NaOH برابر ۱۴ است، اما pH محلول ۲ مولار BOH بین ۷ تا ۱۴ است، پس حتماً میزان یونش BOH کمتر بوده است. (فصل ۱- ص ۲۷)

**۷۷. گزینه ۳ درست است.**

$$۴۵\,\text{gBOH}\times\frac{۱\,\text{molBOH}}{۳۶۰\,\text{gBOH}}=۰/۱۲۵\,\text{mol}$$

$$\text{M(BOH)}=\frac{۰/۱۲۵\,\text{mol}}{۲/۵\,\text{Lit}}=۰/۰۵\,\text{mol.L}^{-۱}$$

با تقریب خوبی می‌توان غلظت یون هیدروکسید را از این رابطه به‌دست آورد:

$$\left[\text{OH}^-\right]=\sqrt{\text{K}_\text{b}\text{M}}=\sqrt{۲\times۱۰^{-۵}\times۰/۰۵}=۱۰^{-۳}\ \text{mol.L}^{-۱}$$

$$\left[\text{H}^+\right]=\frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۳}}=۱۰^{-۱۱}$$

$$\text{pH}=-\log(۱۰^{-۱۱})=۱۱$$

(فصل ۱ - ص ۲۹)

**۷۸. گزینه ۱ درست است.**

الف) درست است. در این واکنش خنثی شدن، تنها غلظت یون‌های $\text{H}^+$ و $\text{OH}^-$ کاهش می‌یابد. زیرا سدیم‌نیترات تولیدشده در آب حل می‌شود پس غلظت $\text{NO}_۳^-$ ثابت می‌ماند.

ب) درست است. NaOH یک باز قوی یک‌ظرفیتی و $\text{H}_۲\text{SO}_۴$ یک اسید قوی دوظرفیتی است. پس ۱ مول $\text{H}_۲\text{SO}_۴$ می‌تواند ۲ مول NaOH را خنثی کند.

پ) نادرست است؛ زیرا واکنش خنثی شدن واکنش میان اسید و باز است که نمک و آب تولید می‌کند.

ت) نادرست است؛ زیرا اسید معده انسان هیدروکلریک‌اسید (HCl) است نه کلریک‌اسید $(\text{HClO}_۳)$. (فصل ۱- ص ۳۰)

**۷۹. گزینه ۳ درست است.**

آمونیاک یک باز ضعیف است و با اسید معده واکنش می‌دهد ولی به شدت سمی و تحریک‌کننده دستگاه تنفسی است و نمی‌توان از آن به‌عنوان ضد اسید معده استفاده کرد. (فصل ۱ - ص ۳۲)

**۸۰. گزینه ۴ درست است.**

چون آب خالص است: $[H^+]=[OH^-]$ و چون گفته حاصل‌ضرب $۴\times۱۰^{-۱۴}$ است $[H^+].[OH^-]=۴\times۱۰^{-۱۴}$

پس می‌توان گفت: $\left[OH^-\right]=۲\times۱۰^{-۷}$ ، $\left[H^+\right]=۲\times۱۰^{-۷}$ و pH آب برابر ۶/۷ است:

$$pH=-\log(۲\times۱۰^{-۷}) \Rightarrow pH=۷-\log ۲=۷-۰/۳=۶/۷$$

اما نمی‌توان گفت محیط اسیدی است، چون آب خالص همواره خنثی است و این تغییر pH به‌دلیل تغییر دما بوده نه حل کردن یک مادهٔ اسیدی در آب. (فصل ۱ - ص ۲۷)